Esame di Calcolo delle Probabilità del 7 gennaio 2004 (Corso di Laurea Triennale in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Cognome Nome Matricola

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Somma	Voto finale

Attenzione: si consegnano SOLO i fogli di questo fascicolo.

Esercizio 1. Consideriamo uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, e una variabile aleatoria $X \in L^+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo gli eventi

$$A_n := \{n - 1 \leq X < n\}$$

Dimostrare che:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\mathbf{1}_{A_n} \leq X < \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbf{1}_{A_n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\mathbb{P}(A_n) = \sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{P}\{X \geq j\}$

c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{P}\{X \geq j\} \leq \mathbb{E}[X] < 1 + \sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{P}\{X \geq j\}$

Esercizio 2. Sia $Z = (Z_n)_n$ un processo di Bernoulli di parametro $1/2$, e siano $(Y_n)_n$ i.i.d. di legge $Exp(\lambda)$, con $\lambda > 0$ e indipendenti da Z. Definiamo poi il processo X ricorsivamente in questo modo:

$$X_{n+1} := \frac{1}{2}X_n + Z_n Y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

dove X_1 è una variabile aleatoria arbitraria indipendente dalle $(Y_n)_n$ e da Z.

a) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, la variabile aleatoria X_n è indipendente da (Y_n, Z_n).

b) Calcolare la funzione caratteristica di X_{n+1} in funzione di φ_{X_n}.

Suggerimento: usare la disintegrazione rispetto a Z_n, oppure il fatto che $e^{itY_nZ_n} = Z_n e^{itY_n} + (1 - Z_n)e^{it0}$.

c) Calcolare la funzione caratteristica di X_{n+1} in funzione di φ_{X_1}.

d) Dimostrare che $X_n \rightharpoonup Exp(\lambda)$.

Esercizio 3. Siano X, Y variabili aleatorie indipendenti, di leggi rispettivamente $\Gamma(a,\lambda)$, $\Gamma(b,\lambda)$, con $a,b,\lambda > 0$. Calcolare la legge di $X+Y$ e la legge condizionale di X rispetto a $X+Y$.

Esercizio 4. Consideriamo una successione di variabili aleatorie $(X_n)_{n\geq 1}$ i.i.d. di legge $\mathbb{P}\{X_n = 1\} = p$, $\mathbb{P}\{X_n = -1\} = 1-p$, con $p \in (0,1)$, e per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo

$$S_n := x_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i$$

con $x_0 \in \mathbb{Z}$, e la variabile aleatoria

$$T := \inf\{n \mid |S_n| = R\},$$

dove $R \in \mathbb{N}$, $R > |x_0|$.

a) Dire per quali valori di $p \in (0,1)$ il processo S è una (super-)(sub-)martingala.

b) Dimostrare che $(S_n - (2p-1)n)_n$ è una martingala e che T è un tempo di arresto.

c) Dando per noto che $T < +\infty$ q.c., dimostrare che $(S_{n\wedge T} - (2p-1)(n \wedge T))_n$ converge q.c., e che
$$\mathbb{E}[S_{n\wedge T}] - \mathbb{E}[(2p-1)(n\wedge T)] \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}[S_T] - (2p-1)\mathbb{E}[T]$$

Suggerimento: usare il fatto che $(S_{n\wedge T})_n$ è una successione dominata (da cosa?) e che $((2p-1)(n\wedge T))_n$ è monotona.

d) Utilizzando *b*) e *c*), dimostrare che se $p \neq 1/2$ si ha

$$\mathbb{E}[T] \leq \frac{R - |x_0|}{|2p-1|}$$

Soluzioni

Esercizio 1.

a) Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, sull'evento A_n si ha che $n-1 \leq X < n$, e questo si può scrivere $(n-1)\mathbf{1}_{A_n} \leq X\mathbf{1}_{A_n} < n\mathbf{1}_{A_n}$. Sommando su n, si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\mathbf{1}_{A_n} \leq X\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{1}_{A_n} < \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbf{1}_{A_n}$$

dove le somme convergono poichè sono a termini positivi. Infine, dato che gli $(A_n)_n$ sono disgiunti, si ha che $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{1}_{A_n} = \mathbf{1}_{\cup_{n=1}^{\infty}A_n} = \mathbf{1}_{\{X\geq 0\}} = 1$ q.c.

b) Partendo dal secondo membro, si ha che

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{P}\{X \geq j\} &= \sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=j+1}^{\infty}A_n\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=j+1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{n}\mathbb{P}(A_n) = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\mathbb{P}(A_n)\end{aligned}$$

poichè il primo addendo è uguale a 0.

c) Calcolando il valor medio della disuguaglianza del punto a), otteniamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\mathbf{1}_{A_n}\right] &= \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\{X \geq j\} \leq \\ &\leq \mathbb{E}[X] < \\ &< \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty}n\mathbf{1}_{A_n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\mathbb{P}(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\{X \geq j\} + \mathbb{P}\{X \geq 0\} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\{X \geq j\}\end{aligned}$$

dove si è usato il teorema di integrazione per serie positive.

Esercizio 2.

a) Per $n = 1$, la tesi è automaticamente vera. Per $n > 1$, X_n dipende da Y_{n-1}, Z_{n-1} e X_{n-1}; per induzione si riesce quindi a mostrare che X_n dipende da $Y_{n-1}, Z_{n-1}, \dots, Y_1, Z_1, X_1$. Siccome Y_n e Z_n sono indipendenti da $Y_{n-1}, Z_{n-1}, \dots, Y_1, Z_1, X_1$, segue la tesi.

b) Per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha $\varphi_{X_{n+1}}(t) = \varphi_{X_n}(\frac{t}{2})\varphi_{Y_nZ_n}(t)$. Per calcolare $\varphi_{Y_nZ_n}$ si può procedere in due modi: il primo è considerare la disintegrazione di $\mathbb{P}$ secondo i valori di Z_n in questo modo:

$$\varphi_{Y_nZ_n}(t) = \mathbb{E}[e^{itY_nZ_n}] = \mathbb{E}_0[e^{itY_n\cdot 0}]\mathbb{P}\{Z_n = 0\} + \mathbb{E}_1[e^{itY_n\cdot 1}]\mathbb{P}\{Z_n = 1\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda - it} = \frac{\lambda - i\frac{t}{2}}{\lambda - it}$$

dove $\mathbb{E}_i$ è la speranza calcolata rispetto alla probabilità $\mathbb{Q}_i := \mathbb{P}(\,\cdot\,|\{Z_n = i\})$. L'altro modo è scrivere $e^{itY_nZ_n} = Z_n e^{itY_n} + (1 - Z_n)e^{itY_n\cdot 0} = Z_n e^{itY_n} + (1 - Z_n)$; calcolando la media, si arriva allo stesso risultato. Una volta calcolato $\varphi_{Y_nZ_n}$, si ha:

$$\varphi_{X_{n+1}}(t) = \varphi_{X_n}\left(\frac{t}{2}\right)\frac{\lambda - i\frac{t}{2}}{\lambda - it}$$

c) Per induzione si ha

$$\begin{aligned}\varphi_{X_{n+1}}(t) &= \varphi_{X_n}\left(\frac{t}{2}\right)\frac{\lambda - i\frac{t}{2}}{\lambda - it} = \varphi_{X_{n-1}}\left(\frac{t}{4}\right)\frac{\lambda - i\frac{t}{4}}{\lambda - i\frac{t}{2}}\frac{\lambda - i\frac{t}{2}}{\lambda - it} = \varphi_{X_{n-1}}\left(\frac{t}{4}\right)\frac{\lambda - i\frac{t}{4}}{\lambda - it} = \\ &= \ldots = \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{2^n}\right)\frac{\lambda - i\frac{t}{2^n}}{\lambda - it}\end{aligned}$$

d) Per ogni $t \in \mathbb{R}$ fissato, per $n \to \infty$ si ha che $\varphi_{X_1}(\frac{t}{2^n}) \to 1$, poichè φ_{X_1} è continua e $\varphi_{X_1}(0) = 1$. Allora, per $n \to \infty$ si ottiene

$$\varphi_{X_n}(t) = \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{2^{n-1}}\right)\frac{\lambda - i\frac{t}{2^{n-1}}}{\lambda - it} \to 1\frac{\lambda}{\lambda - it}$$

che è la funzione caratteristica di una legge $Exp(\lambda)$. Per il teorema di Paul Levy, si ha la tesi.

Esercizio 3. Questo esercizio si può fare in due modi, che portano entrambi allo stesso risultato.
Il modo più meccanico è quello di calcolare la legge congiunta del vettore $(X, X+Y)$ ed applicare la formula vista a lezione. Sappiamo che il vettore (X, Y) ha densità congiunta

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{x>0}\frac{\lambda^b}{\Gamma(b)}y^{b-1}e^{-\lambda y}\mathbf{1}_{y>0}$$

rispetto alla misura di Lebesgue bidimensionale. Allora il vettore aleatorio $(X, X+Y)$ si ottiene tramite il diffeomorfismo $\varphi(x, y) := (x, x+y) =: (x, z)$, che è tale che $|\det D\varphi^{-1}| \equiv 1$ e $\varphi^{-1}(x, z) = (x, y) = (x, z - x)$. Allora la densità congiunta del vettore $(X, X+Y)$ rispetto alla misura di Lebesgue bidimensionale è data da

$$f_{XZ}(x, z) = f_{XY}(\varphi^{-1}(x, z))|\det D\varphi^{-1}(x, z)| = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\frac{\lambda^b}{\Gamma(b)}x^{a-1}(z - x)^{b-1}e^{-\lambda z}\mathbf{1}_{0<x<z}$$

Una versione della densità marginale di $X + Y$ è

$$f_Z(z) = \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)}z^{a+b-1}e^{-\lambda z}\mathbf{1}_{z>0}$$

(ricordiamo infatti che $X + Y \sim \Gamma(a + b, \lambda)$). Per la formula vista a lezione, una versione della legge condizionale di X rispetto a $X + Y$ è data dalla famiglia $(\nu_z)_{z>0}$, dove ν_z ha densità, rispetto alla misura di Lebesgue sulla retta, pari a

$$\frac{f_{XZ}(x, z)}{f_Z(z)} = \frac{\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\frac{\lambda^b}{\Gamma(b)}x^{a-1}(z - x)^{b-1}e^{-\lambda z}\mathbf{1}_{0<x<z}}{\frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)}z^{a+b-1}e^{-\lambda z}\mathbf{1}_{z>0}} = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\left(\frac{x}{z}\right)^{a-1}\left(1 - \frac{x}{z}\right)^{b-1}z\mathbf{1}_{0<x<z}$$

che è l'omotetia di una densità di una legge Beta $B(a,b)$ su $(0, X+Y)$.
Il secondo modo è il seguente: per ogni $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^+$ misurabile, ricordando che $X+Y\sim\Gamma(a+b,\lambda)$ e raccogliendo la sua densità, si ha:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X,X+Y)] &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,x+y)\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{x>0}\frac{\lambda^b}{\Gamma(b)}y^{b-1}e^{-\lambda y}\mathbf{1}_{y>0}\,dx\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,z)\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\frac{\lambda^b}{\Gamma(b)}x^{a-1}(z-x)^{b-1}e^{-\lambda z}\mathbf{1}_{0<x<z}\,dx\,dz = \\
&= \int_0^\infty\left(\int_0^z f(x,z)\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\left(\frac{x}{z}\right)^{a-1}\left(1-\frac{x}{z}\right)^{b-1} z\,dx\right)\frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)}z^{a+b-1}e^{-\lambda z}\,dz
\end{aligned}$$

e si ricava lo stesso risultato di prima.

Esercizio 4. Innanzitutto notiamo che la filtrazione naturale di X è uguale a quella di S (se si eccettua $\mathcal{F}_0^S=\{\emptyset,\Omega\}$ e $\mathcal{F}_0^X$ che non è definito): infatti per ogni $n\geq 1$, S_n è funzione misurabile di $X_1,\dots,X_n$, e $X_n=S_n-S_{n-1}$ è quindi funzione misurabile di $S_1,\dots,S_n$.

a) Per ogni $n\geq 0$ si ha

$$\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n^S]=\mathbb{E}[S_n+X_{n+1}|\mathcal{F}_n^S]=S_n+\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n^S]=S_n+\mathbb{E}[X_{n+1}]=S_n+(2p-1)$$

e quindi S è una (super-)(sub-)martingala a seconda che $p(<)(>)=1/2$.

b) Per ogni $n\geq 1$ si ha

$$\mathbb{E}[S_{n+1}-(2p-1)(n+1)-S_n+(2p-1)n|\mathcal{F}_n^S]=\mathbb{E}\left[X_{n+1}-(2p-1)|\mathcal{F}_n^S\right]=0$$

Siccome S è un processo adattato e T è un tempo di entrata (di S nell'insieme $\{-R,R\}$), si ha che T è un tempo di arresto.

c) Dal teorema di arresto, $(S_{n\wedge T}-(2p-1)(n\wedge T))_n$ è una martingala. Siccome $T<+\infty$ q.c., si ha che $(S_{n\wedge T}-(2p-1)(n\wedge T))_n$ converge quasi certamente verso la variabile aleatoria $S_T-(2p-1)T$. Inoltre sappiamo che $|S_{n\wedge T}|\leq R\in L^1$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, e $n\wedge T\nearrow T$. Applicando quindi rispettivamente i teoremi di Lebesgue e di Beppo Levi e il teorema di arresto (per i tempi di arresto limitati 0 e $n\wedge T$), si ha:

$$x_0=S_0-0=\mathbb{E}[S_{n\wedge T}-(2p-1)(n\wedge T)]\longrightarrow\mathbb{E}[S_T]-(2p-1)\mathbb{E}[T]$$

Se $p\neq\frac{1}{2}$, si ottiene che

$$\mathbb{E}[T]=\frac{\mathbb{E}[S_T]-x_0}{2p-1}\leq\frac{R-x_0}{|2p-1|}$$

Esame di Probabilità mod. B del 7 gennaio 2004 (Corso di Laurea in Matematica, Universitá degli Studi di Padova) (docente: Tiziano Vargiolu)

Sono ammessi all'orale:

Veronese Giulia	21,5

Visione compiti e orali: giovedì 8 gennaio ore 10 nel mio studio.