Esame di Calcolo delle Probabilità del 7 gennaio 2004 (Corso di Laurea Triennale in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Cognome Nome Matricola

| Es. 1 | Es. 2 | Es. 3 | Es. 4 | Somma | Voto finale |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

Attenzione: si consegnano SOLO i fogli di questo fascicolo.

**Esercizio 1.** Consideriamo uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, e una variabile aleatoria $X \in L^+(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo gli eventi

$$A_n := \{n - 1 \leq X < n\}$$

Dimostrare che:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\mathbf{1}_{A_n} \leq X < \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbf{1}_{A_n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\mathbb{P}(A_n) = \sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{P}\{X \geq j\}$

c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{P}\{X \geq j\} \leq \mathbb{E}[X] < 1 + \sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{P}\{X \geq j\}$

**Esercizio 2.** Sia $Z = (Z_n)_n$ un processo di Bernoulli di parametro $1/2$, e siano $(Y_n)_n$ i.i.d. di legge $Exp(\lambda)$, con $\lambda > 0$ e indipendenti da $Z$. Definiamo poi il processo $X$ ricorsivamente in questo modo:

$$X_{n+1} := \frac{1}{2}X_n + Z_n Y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

dove $X_1$ è una variabile aleatoria arbitraria indipendente dalle $(Y_n)_n$ e da $Z$.

a) Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, la variabile aleatoria $X_n$ è indipendente da $(Y_n, Z_n)$.

b) Calcolare la funzione caratteristica di $X_{n+1}$ in funzione di $\varphi_{X_n}$.

Suggerimento: usare la disintegrazione rispetto a $Z_n$, oppure il fatto che $e^{itY_nZ_n} = Z_n e^{itY_n} + (1 - Z_n)e^{it0}$.

c) Calcolare la funzione caratteristica di $X_{n+1}$ in funzione di $\varphi_{X_1}$.

d) Dimostrare che $X_n \rightharpoonup Exp(\lambda)$.

**Esercizio 3.** Siano $X$, $Y$ variabili aleatorie indipendenti, di leggi rispettivamente $\Gamma(a, \lambda)$, $\Gamma(b, \lambda)$, con $a, b, \lambda > 0$. Calcolare la legge di $X + Y$ e la legge condizionale di $X$ rispetto a $X + Y$.

**Esercizio 4.** Consideriamo una successione di variabili aleatorie $(X_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. di legge $\mathbb{P}\{X_n = 1\} = p$, $\mathbb{P}\{X_n = -1\} = 1 - p$, con $p \in (0, 1)$, e per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo

$$S_n := x_0 + \sum_{i=1}^{n} X_i$$

con $x_0 \in \mathbb{Z}$, e la variabile aleatoria

$$T := \inf\{n \mid |S_n| = R\},$$

dove $R \in \mathbb{N}$, $R > |x_0|$.

a) Dire per quali valori di $p \in (0, 1)$ il processo $S$ è una (super-)(sub-)martingala.

b) Dimostrare che $(S_n - (2p - 1)n)_n$ è una martingala e che $T$ è un tempo di arresto.

c) Dando per noto che $T < +\infty$ q.c., dimostrare che $(S_{n\wedge T} - (2p - 1)(n \wedge T))_n$ converge q.c., e che
$$\mathbb{E}[S_{n\wedge T}] - \mathbb{E}[(2p - 1)(n \wedge T)] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[S_T] - (2p - 1)\mathbb{E}[T]$$

Suggerimento: usare il fatto che $(S_{n\wedge T})_n$ è una successione dominata (da cosa?) e che $((2p - 1)(n \wedge T))_n$ è monotona.

d) Utilizzando $b$) e $c$), dimostrare che se $p \neq 1/2$ si ha

$$\mathbb{E}[T] \leq \frac{R - |x_0|}{|2p - 1|}$$

## Soluzioni

### Esercizio 1.

a) Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, sull'evento $A_n$ si ha che $n-1 \le X < n$, e questo si può scrivere $(n-1)\mathbf{1}_{A_n} \le X\mathbf{1}_{A_n} < n\mathbf{1}_{A_n}$. Sommando su $n$, si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\mathbf{1}_{A_n} \le X\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{1}_{A_n} < \sum_{n=1}^{\infty}n\mathbf{1}_{A_n}$$

dove le somme convergono poichè sono a termini positivi. Infine, dato che gli $(A_n)_n$ sono disgiunti, si ha che $\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{1}_{A_n} = \mathbf{1}_{\cup_{n=1}^{\infty}A_n} = \mathbf{1}_{\{X\ge 0\}} = 1$ q.c.

b) Partendo dal secondo membro, si ha che

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{P}\{X\ge j\} &= \sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=j+1}^{\infty}A_n\right) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=j+1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{n}\mathbb{P}(A_n) = \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\mathbb{P}(A_n)\end{aligned}$$

poichè il primo addendo è uguale a 0.

c) Calcolando il valor medio della disuguaglianza del punto $a$), otteniamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\mathbf{1}_{A_n}\right] &= \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\{X\ge j\} \le \\ &\le \mathbb{E}[X] < \\ &< \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty}n\mathbf{1}_{A_n}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\mathbb{P}(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\{X\ge j\} + \mathbb{P}\{X\ge 0\} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\{X\ge j\}\end{aligned}$$

dove si è usato il teorema di integrazione per serie positive.

### Esercizio 2.

a) Per $n=1$, la tesi è automaticamente vera. Per $n>1$, $X_n$ dipende da $Y_{n-1}$, $Z_{n-1}$ e $X_{n-1}$; per induzione si riesce quindi a mostrare che $X_n$ dipende da $Y_{n-1}, Z_{n-1}, \dots, Y_1, Z_1, X_1$. Siccome $Y_n$ e $Z_n$ sono indipendenti da $Y_{n-1}, Z_{n-1}, \dots, Y_1, Z_1, X_1$, segue la tesi.

b) Per ogni $t\in\mathbb{R}$ si ha $\varphi_{X_{n+1}}(t) = \varphi_{X_n}(\frac{t}{2})\varphi_{Y_nZ_n}(t)$. Per calcolare $\varphi_{Y_nZ_n}$ si può procedere in due modi: il primo è considerare la disintegrazione di $\mathbb{P}$ secondo i valori di $Z_n$ in questo modo:

$$\varphi_{Y_nZ_n}(t) = \mathbb{E}[e^{itY_nZ_n}] = \mathbb{E}_0[e^{itY_n\cdot 0}]\mathbb{P}\{Z_n=0\} + \mathbb{E}_1[e^{itY_n\cdot 1}]\mathbb{P}\{Z_n=1\} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda-it} = \frac{\lambda - i\frac{t}{2}}{\lambda-it}$$

dove $\mathbb{E}_i$ è la speranza calcolata rispetto alla probabilità $\mathbb{Q}_i := \mathbb{P}(\,\cdot\,|\{Z_n = i\})$. L'altro modo è scrivere $e^{itY_nZ_n} = Z_n e^{itY_n} + (1-Z_n)e^{itY_n\cdot 0} = Z_n e^{itY_n} + (1-Z_n)$; calcolando la media, si arriva allo stesso risultato. Una volta calcolato $\varphi_{Y_nZ_n}$, si ha:

$$\varphi_{X_{n+1}}(t) = \varphi_{X_n}\left(\frac{t}{2}\right)\frac{\lambda - i\frac{t}{2}}{\lambda - it}$$

c) Per induzione si ha

$$\begin{aligned}\varphi_{X_{n+1}}(t) &= \varphi_{X_n}\left(\frac{t}{2}\right)\frac{\lambda - i\frac{t}{2}}{\lambda - it} = \varphi_{X_{n-1}}\left(\frac{t}{4}\right)\frac{\lambda - i\frac{t}{4}}{\lambda - i\frac{t}{2}}\frac{\lambda - i\frac{t}{2}}{\lambda - it} = \varphi_{X_{n-1}}\left(\frac{t}{4}\right)\frac{\lambda - i\frac{t}{4}}{\lambda - it} = \\ &= \ldots = \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{2^n}\right)\frac{\lambda - i\frac{t}{2^n}}{\lambda - it}\end{aligned}$$

d) Per ogni $t \in \mathbb{R}$ fissato, per $n \to \infty$ si ha che $\varphi_{X_1}(\frac{t}{2^n}) \to 1$, poichè $\varphi_{X_1}$ è continua e $\varphi_{X_1}(0) = 1$. Allora, per $n \to \infty$ si ottiene

$$\varphi_{X_n}(t) = \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{2^{n-1}}\right)\frac{\lambda - i\frac{t}{2^{n-1}}}{\lambda - it} \to 1\frac{\lambda}{\lambda - it}$$

che è la funzione caratteristica di una legge $Exp(\lambda)$. Per il teorema di Paul Levy, si ha la tesi.

**Esercizio 3.** Questo esercizio si può fare in due modi, che portano entrambi allo stesso risultato.
Il modo più meccanico è quello di calcolare la legge congiunta del vettore $(X, X+Y)$ ed applicare la formula vista a lezione. Sappiamo che il vettore $(X,Y)$ ha densità congiunta

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{x>0}\frac{\lambda^b}{\Gamma(b)}y^{b-1}e^{-\lambda y}\mathbf{1}_{y>0}$$

rispetto alla misura di Lebesgue bidimensionale. Allora il vettore aleatorio $(X, X+Y)$ si ottiene tramite il diffeomorfismo $\varphi(x,y) := (x, x+y) =: (x,z)$, che è tale che $|\det D\varphi^{-1}| \equiv 1$ e $\varphi^{-1}(x,z) = (x,y) = (x, z-x)$. Allora la densità congiunta del vettore $(X, X+Y)$ rispetto alla misura di Lebesgue bidimensionale è data da

$$f_{XZ}(x,z) = f_{XY}(\varphi^{-1}(x,z))|\det D\varphi^{-1}(x,z)| = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\frac{\lambda^b}{\Gamma(b)}x^{a-1}(z-x)^{b-1}e^{-\lambda z}\mathbf{1}_{0<x<z}$$

Una versione della densità marginale di $X+Y$ è

$$f_Z(z) = \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)}z^{a+b-1}e^{-\lambda z}\mathbf{1}_{z>0}$$

(ricordiamo infatti che $X+Y \sim \Gamma(a+b,\lambda)$). Per la formula vista a lezione, una versione della legge condizionale di $X$ rispetto a $X+Y$ è data dalla famiglia $(\nu_z)_{z>0}$, dove $\nu_z$ ha densità, rispetto alla misura di Lebesgue sulla retta, pari a

$$\frac{f_{XZ}(x,z)}{f_Z(z)} = \frac{\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\frac{\lambda^b}{\Gamma(b)}x^{a-1}(z-x)^{b-1}e^{-\lambda z}\mathbf{1}_{0<x<z}}{\frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)}z^{a+b-1}e^{-\lambda z}\mathbf{1}_{z>0}} = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\left(\frac{x}{z}\right)^{a-1}\left(1-\frac{x}{z}\right)^{b-1}z\mathbf{1}_{0<x<z}$$

che è l'omotetia di una densità di una legge Beta $B(a,b)$ su $(0, X+Y)$.
Il secondo modo è il seguente: per ogni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ misurabile, ricordando che $X + Y \sim \Gamma(a+b, \lambda)$ e raccogliendo la sua densità, si ha:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X, X+Y)] &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, x+y) \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x>0} \frac{\lambda^b}{\Gamma(b)} y^{b-1} e^{-\lambda y} \mathbf{1}_{y>0} \, dx \, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,z) \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \frac{\lambda^b}{\Gamma(b)} x^{a-1} (z-x)^{b-1} e^{-\lambda z} \mathbf{1}_{0<x<z} \, dx \, dz = \\
&= \int_0^\infty \left( \int_0^z f(x,z) \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \left(\frac{x}{z}\right)^{a-1} \left(1 - \frac{x}{z}\right)^{b-1} z \, dx \right) \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)} z^{a+b-1} e^{-\lambda z} \, dz
\end{aligned}
$$

e si ricava lo stesso risultato di prima.

**Esercizio 4.** Innanzitutto notiamo che la filtrazione naturale di $X$ è uguale a quella di $S$ (se si eccettua $\mathcal{F}_0^S = \{\emptyset, \Omega\}$ e $\mathcal{F}_0^X$ che non è definito): infatti per ogni $n \geq 1$, $S_n$ è funzione misurabile di $X_1, \ldots, X_n$, e $X_n = S_n - S_{n-1}$ è quindi funzione misurabile di $S_1, \ldots, S_n$.

a) Per ogni $n \geq 0$ si ha

$$\mathbb{E}[S_{n+1} | \mathcal{F}_n^S] = \mathbb{E}[S_n + X_{n+1} | \mathcal{F}_n^S] = S_n + \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n^S] = S_n + \mathbb{E}[X_{n+1}] = S_n + (2p-1)$$

e quindi $S$ è una (super-)(sub-)martingala a seconda che $p(<)(>) = 1/2$.

b) Per ogni $n \geq 1$ si ha

$$\mathbb{E}[S_{n+1} - (2p-1)(n+1) - S_n + (2p-1)n | \mathcal{F}_n^S] = \mathbb{E}\left[X_{n+1} - (2p-1) | \mathcal{F}_n^S\right] = 0$$

Siccome $S$ è un processo adattato e $T$ è un tempo di entrata (di $S$ nell'insieme $\{-R, R\}$), si ha che $T$ è un tempo di arresto.

c) Dal teorema di arresto, $(S_{n \wedge T} - (2p-1)(n \wedge T))_n$ è una martingala. Siccome $T < +\infty$ q.c., si ha che $(S_{n \wedge T} - (2p-1)(n \wedge T))_n$ converge quasi certamente verso la variabile aleatoria $S_T - (2p-1)T$. Inoltre sappiamo che $|S_{n \wedge T}| \leq R \in L^1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e $n \wedge T \nearrow T$. Applicando quindi rispettivamente i teoremi di Lebesgue e di Beppo Levi e il teorema di arresto (per i tempi di arresto limitati 0 e $n \wedge T$), si ha:

$$x_0 = S_0 - 0 = \mathbb{E}[S_{n \wedge T} - (2p-1)(n \wedge T)] \longrightarrow \mathbb{E}[S_T] - (2p-1)\mathbb{E}[T]$$

Se $p \neq \frac{1}{2}$, si ottiene che

$$\mathbb{E}[T] = \frac{\mathbb{E}[S_T] - x_0}{2p-1} \leq \frac{R - x_0}{|2p-1|}$$

**Esame di Probabilità mod. B del 7 gennaio 2004 (Corso di Laurea in Matematica, Universitá degli Studi di Padova) (docente: Tiziano Vargiolu)**

Sono ammessi all'orale:

Veronese Giulia 21,5

Visione compiti e orali: giovedì 8 gennaio ore 10 nel mio studio.