Esame di Calcolo delle Probabilità del 16 luglio 2004
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Cognome Nome Matricola

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Somma	Voto finale

Attenzione: si consegnano SOLO i fogli di questo fascicolo.

Esercizio 1. Consideriamo un processo di Bernoulli $(Z_n)_n$ di parametro p su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, e per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ definiamo le variabili aleatorie $X_n := 2Z_n - 1$ e

$$S_n := a + \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad S_0 := a,$$

con $a \in \mathbb{N}$, $a > 0$. Assegnato poi $K \in \mathbb{N}$, $K > a$, definiamo le tre variabili aleatorie

$$\begin{aligned} T &:= \inf\{n \mid S_n = 0 \text{ o } S_n = K\}, \\ U &:= \inf\{n \mid X_{n-K+1} = \ldots = X_n = 1\}, \\ V &:= K \inf\{n \mid X_{nK-K+1} = \ldots = X_{nK} = 1\}, \end{aligned}$$

Dimostrare che:

a) $T \leq U \leq V$,

b) $V \sim Ge(1/p^K)$;

(suggerimento: definire il processo $Y_n = \mathbf{1}_{\{X_{nK-K+1}=\ldots=X_{nK}=1\}}$, e dimostrare che è un processo di Bernoulli, di parametro ...)

c) $\mathbb{P}\{T < +\infty\} = 1$

Esercizio 2. Consideriamo una successione di variabili aleatorie $(X_n)_n$ i.i.d. di legge $N(0,1)$, e poniamo per ogni $n \geq 1$

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

a) Indagare il comportamento asintotico delle due successioni $\left(\frac{S_n}{n}\right)_n$ e $\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}\right)_n$.

b) Calcolare $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{S_n > \sqrt{n}\}$.

c) Calcolare $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{S_n > n\}$.

Esercizio 3. Sia $(N_t)_t$ il processo di Poisson associato ad una successione $(X_n)_n$ di variabili aleatorie i.i.d. di legge $Exp(\lambda)$, con $\lambda > 0$. Si consideri poi, per ogni $n \geq 1$, la variabile

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$$

che, secondo una interpretazione del processo di Poisson, rappresenta l'istante dell'n-esimo guasto.
Calcolare, per ogni coppia k, n di numeri interi con $k \neq n$, una versione della legge condizionale di S_k rispetto a S_n.
Esercizio 4. Un **processo ramificante ("branching")** è una successione $(Z_n)_n$ di variabili aleatorie intere non negative tali che $Z_0 \equiv 1$, e la legge di Z_{n+1} condizionata a $Z_1, \ldots, Z_n$ è uguale a quella di una somma di Z_n variabili aleatorie i.i.d. (e indipendenti da $Z_1, \ldots, Z_n$) di legge uguale a quella di Z_1. Poniamo $m := \mathbb{E}[Z_1]$, e $W_n := Z_n/m^n$.

a) Verificare che W è una martingala rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_n^Z)_n$.

b) Dimostrare che esiste una variabile aleatoria X tale che $(W_n)_n$ converge quasi certamente a X.

Soluzioni

Esercizio 1.

a) Se per assurdo esiste ω tale che $T(\omega) > U(\omega)$, si ha che $0 < S_n(\omega) < K$ per ogni $n \leq U(\omega)$; ma si ha anche che $S_{U(\omega)}(\omega) - S_{U(\omega)-K}(\omega) = \sum_{i=U(\omega)-K+1}^{U(\omega)} X_i(\omega) = K$, e si ottiene subito un assurdo. Da questo segue che $T \leq U$.

Per dimostrare che $U \leq V$, basta notare che $V = \inf\{Kn \mid X_{nK-K+1} = \ldots = X_{nK} = 1\}$ è lo stesso inf usato per definire U ma calcolato su un insieme più piccolo (i numeri interi multipli di K invece che tutti gli interi).

b) Seguendo il suggerimento del testo, per dimostrare che Y è un processo di Bernoulli basta notare che per ogni k, la variabile aleatoria Y_n dipende solo da $X_{nK-K+1}, \ldots, X_{nK}$; al variare di $n \in \mathbb{N}$, questi blocchi sono disgiunti, e quindi le $(Y_k)_k$ sono indipendenti. La loro legge è inoltre una legge di Bernoulli di parametro

$$\mathbb{P}\{Y_n = 1\} = \mathbb{P}\{X_{nK-K+1} = \ldots = X_{nK} = 1\} = \frac{1}{p^K}$$

Una volta dimostrato che Y è un processo di Bernoulli di parametro $1/p^K$, basta notare che $V/K \inf\{n \mid Y_n = 1\}$ è il suo istante di primo successo, e quindi ha legge $Ge(1/p^K)$.

c) Poichè $V \sim Ge(1/p^K)$, abbiamo

$$\mathbb{P}\{T < +\infty\} \geq \mathbb{P}\{V < +\infty\} = 1$$

Esercizio 2.

a) Per ogni n naturale, S_n è somma delle variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite X_n^2, che sono in L^2. Per la legge forte dei grandi numeri di Kolmogorov-Khintchine abbiamo quindi che

$$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \xrightarrow{\text{q.c.}} \mathbb{E}[X_i^2] = 1$$

Per la seconda successione, dobbiamo calcolare $\text{Var}\,[X_n^2] = \mathbb{E}[X_n^4] - \mathbb{E}[X_n^2]^2 = 3 - 1 = 2$. Abbiamo infatti:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_n^4] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = \left[-x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} 3x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx = \\ &= 0 + 3\mathbb{E}[X_n^2] = 3\end{aligned}$$

Per il teorema limite centrale $\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\text{Var}\,[S_n]}} = \frac{S_n - n}{\sqrt{2n}} \rightharpoonup N(0,1)$, e quindi $\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \rightharpoonup N(0,2)$.

b) Usando il risultato della prima successione abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{S_n > \sqrt{n}\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\frac{S_n}{n} > \frac{1}{\sqrt{n}}\right\} = \mathbb{P}\{1 > 0\} = 1$$

c) Usando il risultato della seconda successione abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{S_n > n\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} > 0\right\} = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{2}$$

Esercizio 3. Innanzitutto notiamo che $S_k \sim \Gamma(k, \lambda)$ e $S_n \sim \Gamma(n, \lambda)$. Distinguiamo poi i due casi $k < n$ e $k > n$.
Se $k < n$, abbiamo che $S_n = S_k + Y$, con $Y := \sum_{i=k+1}^n X_i \sim \Gamma(n-k, \lambda)$ indipendente da $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$. Si trova allora che una versione della legge condizionale di S_k rispetto a S_n è la famiglia $(\nu_z)_{z>0}$ con densità

$$x \to \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(k)\Gamma(n-k)} \left(\frac{x}{z}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{x}{z}\right)^{n-k-1} z \mathbf{1}_{0<x<z}$$

rispetto alla misura di Lebesgue (vedi appello di giugno), che è l'omotetia di una densità di una legge Beta $B(a, b)$ su $(0, X + Y)$.
Se $k > n$, abbiamo che $S_k = S_n + Y$, con $Y := \sum_{i=n+1}^k X_i \sim \Gamma(k-n, \lambda)$ indipendente da $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Da un risultato del corso, risulta allora che la legge di S_k condizionata a S_n è la famiglia $(\pi_z)_{z>0}$, dove π_z è la legge della variabile aleatoria $z + Y$, che ha quindi densità

$$x \to \frac{\lambda^{k-n}}{\Gamma(k-n)} (x - z)^{k-n-1} e^{-\lambda(x-z)}, \quad x > z$$

rispetto alla misura di Lebesgue.

Esercizio 4.

a) Per ogni $n \geq 0$ si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_{n+1}|\mathcal{F}_n^Z] &= \mathbb{E}\left[\frac{Z_{n+1}}{m^{n+1}}\middle| Z_1, \ldots, Z_n\right] = \mathbb{E}\left[\frac{\sum_{i=1}^{Z_n} X_i}{m^{n+1}}\middle| Z_1, \ldots, Z_n\right] = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{Z_n} \mathbb{E}[X_i]}{m^{n+1}} = \frac{m Z_n}{m^{n+1}} = \frac{Z_n}{m^n} = W_n \end{aligned}$$

b) W è una martingala positiva, quindi per il teorema di convergenza delle (super-) martingale segue la tesi.

Esame di Calcolo delle Probabilità del 16 luglio 2004
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Universitá degli Studi di Padova)
(docente: Tiziano Vargiolu)

Sono ammessi all'orale:

Luongo Rosetta	17

Visione compiti e orali: lunedì 19 luglio ore 10.00 nel mio studio.