Esame di Calcolo delle Probabilità del 12 dicembre 2005
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Cognome Nome Matricola

	Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Somma	Voto parziale
Prima parte				XXX XXX XXX		+
Seconda parte	XXX XXX XXX					=
	VOTO FINALE:					

Il compito è in 2 parti:

- **la prima parte** è costituita dall'esercizio 1, dal punto 1 dell'esercizio 2 e dal punto 1 dell'esercizio 3, e sostituisce il primo compitino;
- **la seconda parte** è costituita dai punti 2 e 3 dell'esercizio 2, dal punto 2 dell'esercizio 3 e dall'esercizio 4.

Tutti devono fare la seconda parte, mentre deve fare la prima parte solo chi vuole sostituire i voti del compitino (chi vuole tenere il voto del compitino per la prima parte scrive "vedi compitini" al posto delle soluzioni).

Attenzione: si consegnano SOLO i fogli di questo fascicolo.

Esercizio 1. Siano $(X_n)_n$, X variabili aleatorie reali sullo spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dimostrare che:

a) se $X_n \xrightarrow{L^p} X$, allora $E[|X_n|^p] \to E[|X|^p]$;

b) se $X_n \xrightarrow{L^1} X$, allora $E[X_n] \to E[X]$; è vero il viceversa? (dimostrarlo oppure produrre un controesempio)

c) se $X_n \xrightarrow{L^2} X$, allora Var $[X_n] \to$ Var $[X]$.

Esercizio 2. Sia $(X_n)_n$ una successione di variabili aleatorie indipendenti, dove per ogni $n \geq 1$, X_n ha legge $Exp(c^n)$, con $c > 0$ fissato. Definiamo poi

$$Y_n := \min(X_1, \ldots, X_n)$$

1. Che legge ha Y_n?
2. Dimostrare che se $c < 1$, $Y_n \rightharpoonup Exp(\lambda)$, con $\lambda = \frac{c}{1-c}$.
3. Dimostrare che se $c \geq 1$, $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.
4. Dimostrare che, in ogni caso, Y_n converge quasi certamente ad una variabile aleatoria.

Esercizio 3. Trovare la speranza condizionale e la legge condizionale di Y rispetto a X quando il vettore (X, Y) ha densità congiunta data da:

1. $f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda y}$, $0 \leq x \leq y < +\infty$
2. $f(x, y) = x e^{-x(y+1)}$, $x, y \geq 0$.

Esercizio 4. Un dado a 6 facce è tirato ripetutamente, e indichiamo con $(Y_n)_n$ la sequenza dei risultati. Dimostrare che i seguenti processi sono catene di Markov, e per ognuno calcolare la matrice di transizione.

1. Il più grande numero X_n uscito fino all'n-esimo lancio.
2. Il numero N_n di sei usciti fino all'n-esimo lancio.
3. Per ogni tempo $r \geq 1$, il tempo C_r trascorso dall'uscita dell'ultimo 6.

Per ogni tempo $r \geq 1$ chiamiamo B_r il tempo da attendere fino all'uscita del prossimo 6.

4. Dimostrare che $r + B_r$ è un tempo di arresto rispetto alla filtrazione naturale di Y.

Soluzioni

Esercizio 1.

1. Siccome $\|\cdot\|_p$ è una norma, la disuguaglianza triangolare implica

$$\begin{aligned} \|X\|_p &\leq \|X - X_n\|_p + \|X_n\|_p, \\ \|X_n\|_p &\leq \|X - X_n\|_p + \|X\|_p, \end{aligned}$$

   che combinate assieme danno $|\|X_n\|_p - \|X\|_p| \leq \|X - X_n\|_p$. Siccome il secondo membro tende a zero, si ha che $\|X_n\|_p \to \|X\|_p$; elevando entrambi i membri alla potenza p si ha la tesi.

2. Abbiamo $|E[X_n] - E[X]| = |E[X_n - X]| \leq E[|X_n - X|]$, che tende a 0, e abbiamo la tesi.

   Il viceversa non vale: consideriamo infatti una variabile aleatoria $Y \sim Be(1/2)$, e definiamo $X_n := Y$, $X := 1 - Y$. Allora $E[X_n] = 1/2 = E[X]$, ma $|X_n - X| = |2Y - 1| = 1$, quindi $E[|X_n - X|] = 1$ non converge a 0.

3. Se $X_n \xrightarrow{L^2} X$, allora $X_n \xrightarrow{L^1} X$, e per il punto (b) si ha che $E[X_n] \to E[X]$. Per il punto (a) si ha poi che $E[X_n^2] \to E[X^2]$. Si ha quindi:

$$\text{Var}\,[X_n] = E[X_n^2] - E[X_n]^2 \to E[X^2] - E[X]^2 = \text{Var}\,[X]$$

Esercizio 2.

1. Basta calcolare la funzione di ripartizione di Y_n: per ogni $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(t) &= 1 - \mathbb{P}\{Y_n > t\} = 1 - \mathbb{P}\{X_1 > t, \ldots, X_n > t\} = 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\{X_i > t\} = \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} e^{-c^i t} = 1 - \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} c^i t\right) \end{aligned}$$

   quindi $Y_n \sim Exp(\lambda_n)$, con $\lambda_n := \sum_{i=1}^{n} c^i$.

2. Se $c < 1$, allora per ogni $t \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\varphi_{Y_n}(t) = \frac{\lambda_n}{\lambda_n - it} \to \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

   che è la funzione caratteristica di una legge $Exp(\lambda)$, con $\lambda = \frac{c}{1-c} = \sum_{i=1}^{\infty} c^i$. Per il teorema di Paul Levy, si ha che $Y_n \rightharpoonup Exp(\lambda)$.

3. Se $c \geq 1$, allora $\lambda_n \to +\infty$, e si ha per ogni $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi_{Y_n}(t) = \frac{\lambda_n}{\lambda_n - it} \to 1$$

   che è la funzione caratteristica della costante 0. Per il teorema di Paul Levy, si ha che $Y_n \rightharpoonup 0$. Siccome il limite è una costante, abbiamo anche che $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

4. Per ogni $\omega \in \Omega$, abbiamo che $Y_n(\omega) \geq Y_{n+1}(\omega)$. Infatti:

$$Y_n(\omega) \geq \min(Y_n(\omega), X_{n+1}(\omega)) = Y_{n+1}(\omega)$$

Inoltre la successione $(Y_n(\omega))_n$ è positiva. Essendo una successione decrescente e limitata inferiormente, ammette limite, che chiamiamo $Y(\omega)$ ed è una variabile aleatoria. Abbiamo quindi che $Y_n \xrightarrow{\text{q.c.}} Y$.

Esercizio 3.

1. Una versione della densità marginale di X è data da

$$f_X(x) = \int_x^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda y}\, dy = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad x \geq 0$$

quindi una versione della legge condizionale di Y rispetto a X è data dalla famiglia $(\nu_x)_{x\geq 0}$, dove ν_x ha densità

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda y}}{\lambda e^{-\lambda x}} \mathbf{1}_{[x,+\infty)}(y) = \lambda e^{-\lambda(y-x)} \mathbf{1}_{[x,+\infty)}(y)$$

rispetto alla misura di Lebesgue.

Per calcolare la speranza condizionale, sfruttiamo la relazione $E[g(Y)|X] = \varphi(X)$, con $\varphi(x) = \int g(y)\, d\nu_x(y)$. Nel nostro caso $g(y) = y$, e abbiamo

$$\varphi(x) = \int y\, d\nu_x(y) = \int_x^{+\infty} y\lambda e^{-\lambda(y-x)}\, dy = \frac{1}{\lambda} + x$$

quindi $E[Y|X] = X + 1/\lambda$.

2. Una versione della densità marginale di X è data da

$$f_X(x) = \int_0^{+\infty} x e^{-x(y+1)}\, dy = e^{-x}, \qquad x \geq 0$$

quindi una versione della legge condizionale di Y rispetto a X è data dalla famiglia $(\nu_x)_{x\geq 0}$, dove ν_x ha densità

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{x e^{-x(y+1)}}{e^{-x}} \mathbf{1}_{[0,+\infty)}(y) = x e^{-xy} \mathbf{1}_{[0,+\infty)}(y)$$

rispetto alla misura di Lebesgue. Quindi ν_x è una legge esponenziale di parametro x.

Per calcolare la speranza condizionale, procediamo come prima e otteniamo

$$\varphi(x) = \int y\, d\nu_x(y) = \int_0^{+\infty} y x e^{-xy}\, dy = \frac{1}{x}$$

quindi $E[Y|X] = 1/X$.

Esercizio 4. Innanzitutto è ragionevole supporre che le $(Y_n)_n$ siano indipendenti; chiamiamo $\mathcal{F}_n := \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$ la filtrazione naturale delle $(Y_n)_n$.

1. Abbiamo che $X_n = \max(Y_1, \ldots, Y_n) = \max(X_{n-1}, Y_n)$ è un processo a valori in $\{1, \ldots, 6\}$ e adattato a $(\mathcal{F}_n)_n$. Per ogni $x_1 \ldots, x_{n+1} \in \{1, \ldots, 6\}$ abbiamo poi

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\{X_n = x_n \mid X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}\} = \\ &= \mathbb{P}\{\max(X_{n-1}, Y_n) = x_n \mid X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}\} = \\ &= \mathbb{P}\{\max(x_{n-1}, Y_n) = x_n \mid X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}\} \end{aligned}$$

Notiamo che l'evento $\{X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}\}$ è $\mathcal{F}_{n-1}$-misurabile, mentre Y_n è indipendente da $\mathcal{F}_{n-1}$. Si ha quindi che

$$\mathbb{P}\{X_n = x_n \mid X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}\} = \mathbb{P}\{\max(x_{n-1}, Y_n) = x_n\} = p_{x_{n-1}, x_n}$$

dove $P = (p_{xy})_{xy}$ è la matrice 6×6 definita da

$$p_{xy} := \begin{cases} 0 & \text{se } x > y \\ \frac{x}{6} & \text{se } x = y \\ \frac{1}{6} & \text{se } x < y \end{cases}$$

2. Abbiamo che $N_n := \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{Y_k = 6\}} = N_{n-1} + \mathbf{1}_{\{Y_n = 6\}}$ è un processo a valori in $\mathbb{N}$ e adattato a $(\mathcal{F}_n)_n$. Per ogni $x_1 \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{N}$, si può dimostrare, con procedimento analogo al punto 1., che

$$\mathbb{P}\{N_n = x_n \mid N_1 = x_1, \ldots, N_{n-1} = x_{n-1}\} = \mathbb{P}\{\mathbf{1}_{\{Y_k = 6\}} = x_n - x_{n-1}\} = p_{x_{n-1}, x_n}$$

dove $P = (p_{xy})_{xy}$ stavolta è la matrice infinita definita da

$$p_{xy} := \begin{cases} \frac{5}{6} & \text{se } y = x \\ \frac{1}{6} & \text{se } y = x + 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

3. Abbiamo che

$$\begin{aligned} C_r &= r - \max\{n \le r \mid Y_n = 6\} = \max\{k \mid X_r \neq 6, \ldots, X_{r-k+1} \neq 6, X_{r-k} = 6\} = \\ &= (C_{r-1} + 1)\mathbf{1}_{\{Y_n \neq 6\}} \end{aligned}$$

è un processo a valori in $\mathbb{N}$ e adattato a $(\mathcal{F}_n)_n$. Per ogni $x_1 \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{N}$, si può dimostrare, con procedimento analogo al punto 1., che

$$\mathbb{P}\{C_n = x_n \mid C_1 = x_1, \ldots, C_{n-1} = x_{n-1}\} = \mathbb{P}\{(x_{n-1} + 1)\mathbf{1}_{\{Y_k \neq 6\}} = x_n\} = p_{x_{n-1}, x_n}$$

dove $P = (p_{xy})_{xy}$ stavolta è la matrice infinita definita da

$$p_{xy} := \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{se } y = 0 \\ \frac{5}{6} & \text{se } y = x + 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

4. Abbiamo che

$$B_r = \inf\{n \geq r \mid X_n = 6\} - r$$

è una variabile aleatoria intera a valori in $\mathbb{N}$. Quindi: per ogni $n < r$ si ha che

$$\{B_r + r \leq n\} = \{B_r \leq n - r\} = \emptyset \in \mathcal{F}_n^X$$

mentre per ogni $n \geq r$ si ha che

$$\{B_r + r \leq n\} = \{B_r + r > n\}^c = \{X_r \neq 6, \ldots, X_n \neq 6\} \in \mathcal{F}_n^X$$

e si ha la tesi.

Esame di Calcolo delle Probabilità del 12 dicembre 2005
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Universitá degli Studi di Padova)
(docente: Tiziano Vargiolu)

Sono ammessi all'orale:

Carraro Ketty	18
Danzi Silvia	24(*)
De Rossi Giulia	23
Garrell Zulueta Anais	23,5
Rosestolato Mauro	25(*)

(*) già comprensivo del voto del primo compitino.
Visione compiti e orali: venerdì 16 dicembre ore 10 nel mio studio