Esame di Calcolo delle Probabilità del 11 gennaio 2006
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Cognome Nome Matricola

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Somma	Voto finale

Attenzione: si consegnano SOLO i fogli di questo fascicolo.

Esercizio 1. Siano $(X_n)_n$ una successione di variabili aleatorie sullo spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ e $(c_n)_n$ una successione di numeri reali avente limite $c \in \mathbb{R}$. Dimostrare che la convergenza $X_n \to X$ implica lo stesso tipo di convergenza di $c_n X_n \to cX$ nei seguenti casi:

1. $X_n \stackrel{\text{q.c.}}{\to} X$;
2. $X_n \stackrel{\mathbb{P}}{\to} X$;
3. $X_n \stackrel{L^p}{\to} X$;
4. $X_n \rightharpoonup X$.

Esercizio 2. Siano $X_1, \dots, X_n$ variabili aleatorie i.i.d. di legge $N(0,1)$.
Utilizzare la funzione caratteristica per trovare la legge di

1. X_1^2;
2. $\sum_{i=1}^n X_i^2$;

Trovare la funzione caratteristica di

c) $X_1 X_2$;

d) $X_1 X_2 + X_3 X_4$.

Esercizio 3. Sia X una variabile aleatoria di legge Beta di parametri a e b, cioè avente densità $\frac{1}{\beta(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ rispetto alla misura di Lebesgue su $(0,1)$, dove $\beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$. Fissato $n \in \mathbb{N}^*$, sia poi Y una variabile aleatoria avente come legge condizionale rispetto a X la famiglia $(\nu_x)_{x \in (0,1)}$ definita da $\nu_x := B(n,x)$.

1. Trovare la legge di Y. Se $a = b = 1$, che legge è?
2. Calcolare $E[Y]$
3. Calcolare $E[Z^2]$, dove $Z \sim B(n,p)$; calcolare quindi $E[Y^2]$.
4. Calcolare $\mathrm{Var}\,[Y]$.

Suggerimenti: ricordare che $\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ e $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$, dove Γ è la funzione Gamma di Eulero.

Esercizio 4. Consideriamo una catena di Markov sullo spazio degli stati $\{0, 1, \dots, m\}$, con $m > 2$, con matrice di transizione definita da

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 - \dfrac{i}{m} & \text{se } j = i+1 \\ \dfrac{i}{m} & \text{se } j = i-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e legge iniziale $\mu = \delta_i$, con $i \in \{0, 1, \dots, m\}$.

1. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$E\left[X_{n+1} - \frac{m}{2} \;\middle|\; \mathcal{F}_n\right] = \left(1 - \frac{2}{m}\right)\left(X_n - \frac{m}{2}\right)$$

   dove $(\mathcal{F}_n)_n$ è la filtrazione naturale di $(X_n)_n$.

2. Dedurne che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$E\left[X_n - \frac{m}{2}\right] = \left(1 - \frac{2}{m}\right)^n \left(i - \frac{m}{2}\right)$$

3. Dedurne che $\lim_{n\to\infty} E[X_n] = \frac{m}{2}$.

Soluzioni

Esercizio 1.

1. Se $\omega \in \Omega$ è tale che $X_n(\omega) \to X(\omega)$, allora $c_n X_n(\omega) \to cX(\omega)$. Dato che $\{X_n(\omega) \to X(\omega)\}$ è un evento quasi certo, lo è anche $\{c_n X_n(\omega) \to cX(\omega)\}$.

2. Sappiamo che per ogni $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\} \to 0$. Se $c = 0$, allora $X_n \rightharpoonup X$, e quindi per il punto 4. $c_n X_n \rightharpoonup cX = 0$; siccome 0 è una costante, la convergenza è anche in probabilità.

   Se $c \neq 0$ (supponiamo per fissare le idee che $c > 0$), allora esiste $\bar{n}$ tale che $|c_n - c| < \varepsilon$ per ogni $n > \bar{n}$. Si ha allora:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{|c_n X_n - cX| > \varepsilon\} &\leq \mathbb{P}\{|c_n X_n - c_n X| > \varepsilon/2\} + \mathbb{P}\{|c_n X - cX| > \varepsilon/2\} = \\ &= \mathbb{P}\{|X_n - X| > \varepsilon/|2c_n|\} + \mathbb{P}\{|X| > \varepsilon/2|c_n - c|\} \leq \\ &\leq \mathbb{P}\{|X_n - X| > \varepsilon/2(c+\varepsilon)\} + \mathbb{P}\{|X| > \varepsilon/2|c_n - c|\} \to \\ &\to 0 + 0 \end{aligned}$$

3. Sfruttando il fatto che $\|\cdot\|_{L^p}$ è una norma e quindi vale la disuguaglianza triangolare, abbiamo:

$$\begin{aligned} \|c_n X_n - cX\|_{L^p} &\leq \|c_n X_n - c_n X\|_{L^p} + \|c_n X - cX\|_{L^p} = \\ &= |c_n| \|X_n - X\|_{L^p} + |c_n - c| \|X\|_{L^p} \to |c| \cdot 0 + 0 \cdot \|X\|_{L^p} = 0 \end{aligned}$$

4. Per il teorema di Paul Levy, le funzioni caratteristiche $(\varphi_{X_n})_n$ convergono puntualmente a φ_X. Allora per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha che

$$\varphi_{c_n X_n}(t) = \varphi_{X_n}(c_n t) \to \varphi_X(ct) = \varphi_{cX}(t)$$

   e si ha convergenza in legge.

Esercizio 2.

1. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\varphi_{X_1^2}(t) = E[e^{itX_1^2}] = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} e^{itx^2} e^{-\frac{1}{2}x^2}\ dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}x^2(1-2it)}\ dx$$

   Questo integrale si può calcolare in vari modi, e il risultato è

$$\varphi_{X_1^2}(t) = \left(\frac{1}{1-2it}\right)^{1/2}$$

   che è la funzione caratteristica di una legge $\Gamma(1/2, 1/2) = \chi^2(1)$.

2. Per l'indipendenza di $X_1, \ldots, X_n$, per ogni $t \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\varphi_{\sum_{i=1}^n X_i^2}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i^2}(t) = \left(\frac{1}{1-2it}\right)^{n/2}$$

   che è la funzione caratteristica di una legge $\Gamma(n/2, 1/2) = \chi^2(n)$.

3. Condizionando rispetto a X_1, per ogni $t \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\begin{aligned}\varphi_{X_1X_2}(t) &= E[E[e^{itX_1X_2}|X_1]] = E[\varphi_{X_2}(tX_1)] = E[e^{-\frac{1}{2}t^2X_2^2}] = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}x^2(1+t^2)}\, dx = \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^{1/2}\end{aligned}$$

4. Sfruttando l'indipendenza di $X_1, \ldots, X_4$, per ogni $t \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\varphi_{X_1X_2+X_3X_4}(t) = \varphi_{X_1X_2}(t)\varphi_{X_3X_4}(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

Esercizio 3.

1. La variabile aleatoria Y assume valori sullo spazio $F = \{0, \ldots, n\}$. Allora per ogni $k \in \{0, \ldots, n\}$ si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{Y = k\} &= \int_{(0,1)} \nu_x(\{k\})\, d\mu(x) = \int_0^1 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \frac{1}{\beta(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx = \\ &= \binom{n}{k} \frac{1}{\beta(a,b)} \int_0^1 x^{a+k-1}(1-x)^{b+n-k-1}\, dx = \binom{n}{k} \frac{\beta(a+k, b+n-k)}{\beta(a,b)}\end{aligned}$$

Se $a = b = 1$, si ha che

$$\mathbb{P}\{Y = k\} = \binom{n}{k} \frac{\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+2)}}{\frac{\Gamma(1)\Gamma(1)}{\Gamma(2)}} = \binom{n}{k} \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

quindi Y ha legge uniforme su $\{0, \ldots, n\}$.

2. Usando la definizione di legge condizionale si ha

$$\begin{aligned}E[Y] &= \int_{(0,1)} \int_{\{0,\ldots,n\}} y\, d\nu_x(y)\, d\mu(x) = \int_{(0,1)} \sum_{y=0}^n y \binom{n}{y} x^y(1-x)^{n-y}\, d\mu(x) = \\ &= \int_{(0,1)} nx \frac{1}{\beta(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx = \frac{n}{\beta(a,b)} \int_{(0,1)} x^a(1-x)^{b-1}\, dx = \\ &= \frac{n\beta(a+1,b)}{\beta(a,b)} = \frac{n\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)}}{\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}} = \frac{na}{a+b}\end{aligned}$$

3. Abbiamo $E[Z] = np$, Var $[Z] = np(1-p)$, quindi $E[Z^2] =$ Var $[Z] + E[Z]^2 = np(1-p) + n^2p^2 = np(1+(n-1)p) = np + n(n-1)p^2$. Quindi

$$\begin{aligned}E[Y^2] &= \int_{(0,1)} \int_{\{0,\ldots,n\}} y^2\, d\nu_x(y)\, d\mu(x) = \int_{(0,1)} \sum_{y=0}^n y^2 \binom{n}{y} x^y(1-x)^{n-y}\, d\mu(x) = \\ &= \int_{(0,1)} (nx + n(n-1)x^2) \frac{1}{\beta(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx = \\ &= \frac{1}{\beta(a,b)} \int_0^1 nx^a(1-x)^{b-1} + n(n-1)x^{a+1}(1-x)^{b-1}\, dx = \\ &= \frac{n\beta(a+1,b) + n(n-1)\beta(a+2,b)}{\beta(a,b)} = \frac{na}{a+b} + \frac{n(n-1)a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} = \\ &= \frac{na(na+n+b)}{(a+b)(a+b+1)}\end{aligned}$$

4. Abbiamo che

$$\mathrm{Var}\,[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{na(na+n+b)}{(a+b)(a+b+1)} - \frac{n^2a^2}{(a+b)^2} = \frac{nab(a+b+n)}{(a+b)^2(a+b+n)}$$

Esercizio 4.

1. Per definizione di catena di Markov e le proprietà che legano legge condizionale e speranza condizionale, si ha che

$$\begin{aligned} E\left[X_{n+1} - \frac{m}{2} \;\middle|\; \mathcal{F}_n\right] &= (X_n - 1)\frac{X_n}{m} + (X_n + 1)\left(1 - \frac{X_n}{m}\right) - \frac{m}{2} = \\ &= \left(1 - \frac{2}{m}\right)\left(X_n - \frac{m}{2}\right) \end{aligned}$$

2. Per induzione, utilizzando la proprietà di proiezione della speranza condizionale, si ha che

$$\begin{aligned} E\left[X_n - \frac{m}{2}\right] &= E\left[E\left[X_n - \frac{m}{2} \;\middle|\; \mathcal{F}_{n-1}\right]\right] = E\left[\left(1 - \frac{2}{m}\right)\left(X_{n-1} - \frac{m}{2}\right)\right] = \\ &= \left(1 - \frac{2}{m}\right) E\left[X_{n-1} - \frac{m}{2}\right] = \left(1 - \frac{2}{m}\right)^n E\left[X_0 - \frac{m}{2}\right] = \\ &= \left(1 - \frac{2}{m}\right)^n \left(i - \frac{m}{2}\right) \end{aligned}$$

3. Si ha quindi che $\lim_{n\to\infty} E\left[X_n - \frac{m}{2}\right] = 0$, che significa $\lim_{n\to\infty} E[X_n] = \frac{m}{2}$.

Esame di Calcolo delle Probabilità del 11 gennaio 2006
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Universitá degli Studi di Padova)
(docente: Tiziano Vargiolu)

Sono ammessi all'orale:

(*) già comprensivo del voto del primo compitino.
Visione compiti e orali: venerdì 16 dicembre ore 10 nel mio studio