Esame di Calcolo delle Probabilità del 3 aprile 2006
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Cognome Nome Matricola

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Somma	Voto finale

Attenzione: si consegnano SOLO i fogli di questo fascicolo.

Esercizio 1. Siano $(X_n)_n$ una successione di variabili aleatorie di Poisson indipendenti sullo spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, rispettivamente di parametri $(\lambda_n)_n$. Vogliamo analizzare il comportamento della serie $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ a seconda del comportamento di $(\lambda_n)_n$.

1. Che legge ha $\sum_{n=1}^{N} X_n$ (indicare $\sigma_N := \sum_{n=1}^{N} \lambda_n$)?
2. Dimostrare che se $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < +\infty$ allora $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ converge quasi certamente (suggerimento: usare un opportuno teorema di integrazione per serie).
3. Dimostrare che, per ogni k fissato, $(\{\sum_{n=1}^{N} X_n \leq k\})_N$ è una successione decrescente di eventi. Qual è l'evento limite?
4. Dimostrare che, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty$, allora per ogni k fissato, $\mathbb{P}\{\sum_{n=1}^{\infty} X_n \leq k\} = 0$ (suggerimento: usare il fatto che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato, $\lim_{\sigma \to \infty} e^{-\sigma} \frac{\sigma^n}{n!} = 0$).

Esercizio 2. Siano X, Y due variabili aleatorie i.i.d. di media 0 e varianza 1, e chiamiamo φ la loro comune funzione caratteristica. Supponiamo inoltre che $X + Y$ e $X - Y$ siano indipendenti tra di loro.

1. Calcolare le funzioni caratteristiche di $X + Y$ e $X - Y$.
2. Dimostrare che $\varphi(2t) = \varphi^3(t)\varphi(-t)$ (suggerimento: $\varphi(2t) = \varphi_{2X}(t)$).
3. Definendo $\psi(t) := \varphi(t)/\varphi(-t)$, dimostrare che $\psi(2^n t) = \psi(t)^{2^n}$.
4. Dimostrare che $\psi(t) = 1 + o(t^2)$ per $t \to 0$; dedurne che $\psi(t) \equiv 1$.
5. Dedurne che $\varphi(2^n t) = \psi(t)^{4^n}$, e che $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$.

Esercizio 3. Siano X e Y variabili aleatorie reali di densità congiunta

$$f(x, y) = cx(y - x)e^{-y}\mathbf{1}_{\{0 \leq x \leq y < +\infty\}}$$

rispetto alla misura di Lebesgue.

1. Trovare la costante c e le leggi marginali di X e Y.
2. Mostrare che la legge di Y condizionata a X ha densità $f_{Y|X}(y|x) = (y - x)e^{x-y}\mathbf{1}_{\{y \geq x\}}$ rispetto alla misura di Lebesgue.
3. Mostrare che la legge di X condizionata a Y ha densità $f_{X|Y}(x|y) = 6x(y - x)y^{-3}\mathbf{1}_{\{0 \leq x \leq y\}}$ rispetto alla misura di Lebesgue.
4. Dedurne che $\mathbb{E}[X|Y] = \frac{1}{2}Y$ e $\mathbb{E}[Y|X] = X + 2$.

Esercizio 4. Consideriamo una passeggiata aleatoria $(S_n)_n$ (ricordiamo che $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$, con $(X_i)_i$ i.i.d. tali che $\mathbb{P}\{X_i = 1\} = \mathbb{P}\{X_i = -1\} = 1/2$). Ricordiamo che $(S_n)_n$ è una catena di Markov con legge iniziale δ_0 e nucleo di transizione $N(x, \cdot) = \frac{1}{2}\delta_{x+1} + \frac{1}{2}\delta_{x-1}$.

1. Dimostrare che $Y_n := |S_n|$ è una catena di Markov, e trovarne legge iniziale e nucleo di transizione.
2. Dimostrare che $Z_n := M_n - S_n$ è una catena di Markov, dove $M_n := \max\{S_k | k = 1, \ldots, n\}$, e trovarne legge iniziale e nucleo di transizione.
3. Cosa succede se $S_0 \neq 0$?

Soluzioni

Esercizio 1.

1. Poichè le $(X_n)_n$ sono variabili aleatorie di Poisson indipendenti, la loro somma $\sum_{n=1}^N X_n$ ha legge di Poisson di parametro $\sigma_N = \sum_{n=1}^N \lambda_n$.

2. Poichè $(X_n)_n \subset L^+$, vale il teorema di Beppo Levi

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < +\infty$$

Inoltre, per il teorema di integrazione per serie convergenti, si ha che $\mathbb{E}[\sum_{n=1}^{\infty} X_n] = \mathbb{E}[\sum_{n=1}^{\infty} |X_n|] < +\infty$ implica che $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ è quasi certamente finita, cioè converge quasi certamente.

3. Per (quasi) ogni ω fissato, la successione $N \to \sum_{n=1}^N X_n(\omega)$ è crescente, quindi se $\sum_{n=1}^{N+1} X_n(\omega) \leq k$ allora $\sum_{n=1}^N X_n(\omega) \leq k$ e quindi $\{\sum_{n=1}^{N+1} X_n \leq k\} \subseteq \{\sum_{n=1}^N X_n \leq k\}$. L'evento limite è

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{n=1}^{N} X_n \leq k\right\} = \left\{\sum_{n=1}^{N} X_n \leq k \text{ per ogni } n \geq 1\right\} = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} X_n \leq k\right\}$$

4. Per la continuità dall'alto delle misure di probabilità si ha che

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} X_n \leq k\right\} = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{n=1}^{N} X_n \leq k\right\}\right) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left\{\sum_{n=1}^{N} X_n \leq k\right\} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{k} e^{-\sigma_N}\frac{\sigma_N^k}{k!}$$

poichè sappiamo dal punto (1.) che $\sum_{n=1}^N X_n \sim Po(\sigma_N)$. Ma $\sigma_N \to +\infty$ per $N \to \infty$, quindi

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{k} e^{-\sigma_N}\frac{\sigma_N^k}{k!} = \sum_{i=0}^{k} \lim_{N\to\infty} e^{-\sigma_N}\frac{\sigma_N^k}{k!} = 0$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2.

1. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\begin{aligned}\varphi_{X+Y}(t) &= \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = \varphi^2(t),\\ \varphi_{X-Y}(t) &= \varphi_X(t)\varphi_{-Y}(t) = \varphi(t)\varphi(-t)\end{aligned}$$

2. Poichè $2X = X + Y + X - Y$ e per l'indipendenza di $X+Y$ e $X-Y$, abbiamo

$$\varphi(2t) = \varphi_{2X}(t) = \varphi_{X+Y+X-Y}(t) = \varphi_{X+Y}(t)\varphi_{X-Y}(t) = \varphi^3(t)\varphi(-t)$$

3. Dimostriamo la tesi per $n = 1$: abbiamo

$$\psi(2t) = \frac{\varphi(2t)}{\varphi(-2t)} = \frac{\varphi^3(t)\varphi(-t)}{\varphi^3(-t)\varphi(t)} = \frac{\varphi^2(t)}{\varphi^2(-t)} = \psi^2(t)$$

e per induzione si ha la tesi.

4. Per $t \to 0$ si ha

$$\psi(t) = \frac{\varphi(t)}{\varphi(-t)} = \frac{1 + t\varphi'(0) + \frac{1}{2}t^2\varphi''(0) + o(t^2)}{1 - t\varphi'(0) + \frac{1}{2}t^2\varphi''(0) + o(t^2)} = \frac{1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)}{1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)} = 1 + o(t^2)$$

dove abbiamo usato il fatto che $\varphi'(0) = i\mathbb{E}[X] = 0$ e $\varphi''(0) = -\mathbb{E}[X^2] = -1$. Abbiamo allora che

$$\lim_{n\to\infty} \psi\left(\frac{t}{2^n}\right)^{2^n} = \left(1 + o\left(\frac{t^2}{4^n}\right)\right)^{2^n} = e^0 = 1$$

ma dal punto (3.) sappiamo che $\psi(\frac{t}{2^n})^{2^n} = \psi(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, e quindi $\psi(t) \equiv 1$.

5. Il punto (4.) implica che $\varphi(t) = \varphi(-t)$, quindi dal punto (2.) si ha che $\varphi(2t) = \varphi^4(t)$, e per induzione $\varphi(2^n t) = \varphi(t)^{4^n}$, cioè $\varphi(t) = \varphi(\frac{t}{2^n})^{4^n}$. Abbiamo poi

$$\varphi(t) = 1 + t\varphi'(0) + \frac{1}{2}t^2\varphi''(0) + o(t^2) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$$

quindi, analogamente al punto (4.), si ha

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi\left(\frac{t}{2^n}\right)^{4^n} = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{t^2}{4^n} + o\left(\frac{t^2}{4^n}\right)\right)^{4^n} = e^{-t^2/2}$$

Esercizio 3.

1. Dato che f è una densità, deve risultare $\int\int f(x,y)\;dx\;dy = 1$. Dato che $f \geq 0$, si può applicare il teorema di Tonelli. Calcoliamo

$$\int\int f(x,y)\;dy\;dx \;=\; \int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} cx(y-x)e^{-y}\;dy\;dx = \int_0^{+\infty} cxe^{-x}\;dx = c$$

e quindi $c = 1$. La densità marginale di X è data, per ogni $x \geq 0$, da

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int f(x,y)\;dy = \int_x^{+\infty} x(y-x)e^{-y}\;dy = \int_0^{+\infty} xze^{-z-x}\;dz = \\ &= xe^{-x}\int_0^{+\infty} ze^{-z}\;dz = xe^{-x} \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il cambiamento di variabile $z := y - x$. La densità marginale di Y è invece, per ogni $y \geq 0$,

$$f_Y(y) \;=\; \int f(x,y)\;dx = \int_0^y x(y-x)e^{-y}\;dx = e^{-y}\left[\frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{3}x^3\right]_0^y = \frac{1}{6}y^3e^{-y}$$

2. Dalla teoria vista a lezione, la legge condizionale di Y rispetto a X ammette densità $f(x,y)/f_X(x)$ rispetto alla misura di Lebesgue per ogni $x \geq 0$, dove:

$$f_{Y|X}(y|x) := \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{x(y-x)e^{-y}\mathbf{1}_{\{y\geq x\}}}{xe^{-x}} = (y-x)e^{-(y-x)}\mathbf{1}_{\{y\geq x\}}$$

3. Dalla teoria vista a lezione, la legge condizionale di X rispetto a Y ammette densità $f(x,y)/f_Y(y)$ rispetto alla misura di Lebesgue per ogni $y \geq 0$, dove:

$$f_{X|Y}(x|y) := \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{x(y-x)e^{-y}\mathbf{1}_{\{0\leq x\leq y\}}}{\frac{1}{6}y^3e^{-y}} = 6x(y-x)y^{-3}\mathbf{1}_{\{0\leq x\leq y\}}$$

4. Per i legami tra legge condizionale e speranza condizionale, abbiamo che $\mathbb{E}[X|Y] = \varphi(Y)$, dove

$$\begin{aligned}\varphi(y) &:= \int x\ d\nu_y(x) = \int x f_{X|Y}(x|y)\ dx = \int_0^y x6x(y-x)y^{-3}\ dx = \\ &= 6y^{-3}\left[\frac{1}{3}x^3y - \frac{1}{4}x^4\right]_0^y = \frac{1}{2}y\end{aligned}$$

e $\mathbb{E}[Y|X] = \psi(X)$, dove

$$\begin{aligned}\psi(x) &:= \int y\ d\nu_x(y) = \int y f_{Y|X}(y|x)\ dy = \int_x^{+\infty} y(y-x)e^{-(y-x)}\ dx = \\ &= \int_0^{+\infty}(x+z)ze^{-z}\ dz = x\int_0^{+\infty} ze^{-z}\ dz + \int_0^{+\infty} z^2e^{-z}\ dz = x+2! = x+2\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il cambiamento di variabile $z := y - x$.

Esercizio 4.

1. Le $(Y_n)_n$ possono assumere valori su $\mathbb{N}$; allora per ogni $x_0,\ldots,x_n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$\mathbb{P}\{Y_n = x_n \mid Y_0 = x_0,\ldots,Y_{n-1} = x_{n-1}\} = \mathbb{P}\{|S_n| = x_n \mid |S_0| = x_0,\ldots,|S_{n-1}| = x_{n-1}\}$$

Se $x_{n-1} = 0$, questa probabilità è uguale a 1 se $x_n = 0$ e a 0 altrimenti. Se $x_{n-1} > 0$, questa probabilità è uguale a $1/2$ se $x_n = x_{n-1} \pm 1$, e a 0 altrimenti. Infine, la legge iniziale è uguale a δ_0, poichè $Y_0 = |S_0| = 0$ q.c. Possiamo concludere che Y è una catena di Markov di legge iniziale δ_0 e probabilità di transizione data dalla matrice

$$P = (p_{ij})_{i,j\geq 0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \ldots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

mentre il nucleo di transizione è dato da

$$N^Y(x,\cdot) = \delta_0\mathbf{1}_{\{x=0\}} + (1/2\delta_{x+1} + 1/2\delta_{x-1})\mathbf{1}_{\{x>0\}}$$

2. Anche le $(Z_n)_n$ possono assumere valori su $\mathbb{N}$; allora per ogni $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$ calcoliamo:

$$\mathbb{P}\{Z_n = x_n \mid Z_0 = x_0, \ldots, Z_{n-1} = x_{n-1}\}$$

   Se $x_{n-1} = 0$ (cioè $M_{n-1} = S_{n-1}$), questa probabilità è uguale a $1/2$ se $x_n = 0$ (che corrisponde al caso $S_n = S_{n-1} + 1$), a $1/2$ se $x_n = 1$ (che corrisponde al caso $S_n = S_{n-1} - 1$) e a 0 altrimenti. Se $x_{n-1} > 0$, stiamo condizionando all'evento $\{M_0 - S_0 = x_0, \ldots, M_{n-1} = S_{n-1} + x_{n-1}\}$: questa probabilità è uguale a $1/2$ se $x_n = x_n - 1 \pm 1$ (che corrisponde a $S_n = S_{n-1} \mp 1$; in entrambi i casi $M_n = M_{n-1}$) e a 0 altrimenti. Questa probabilità dipende solo da x_{n-1} e non da $x_0, \ldots, x_{n-2}$. Infine, la legge iniziale è uguale a δ_0, poichè $Z_0 = S_0 - M_0 = 0 - 0 = 0$ q.c. Possiamo concludere che Z è una catena di Markov di legge iniziale δ_0 e probabilità di transizione data dalla matrice

$$P = (p_{ij})_{i,j \geq 0} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \ldots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

   mentre il nucleo di transizione è dato da

$$N^Y(x, \cdot) = (1/2\delta_0 + 1/2\delta_1)\mathbf{1}_{\{x=0\}} + (1/2\delta_{x+1} + 1/2\delta_{x-1})\mathbf{1}_{\{x>0\}}$$

3. Cambia solo la legge iniziale di Y, mentre quella di Z ed entrambi i nuclei di transizione non cambiano.

Esame di Calcolo delle Probabilità del 3 aprile 2006
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Universitá degli Studi di Padova)
(docente: Tiziano Vargiolu)

Sono ammessi all'orale:

Albertini Ilaria	18,5
Barigelli Valentina	24,5
Dünnhofer Davide	17,5
Marchioni Marcello	20,5
Marcigot Wally	18,5

Visione compiti e orali: giovedì 6 aprile ore 15.30 nel mio studio, oppure su appuntamento.