Esame di Calcolo delle Probabilità del 4 luglio 2006
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Cognome Nome Matricola

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Somma	Voto finale

Attenzione: si consegnano SOLO i fogli di questo fascicolo.

Esercizio 1. Su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sia $(U_n)_n$ una successione di variabili aleatorie reali indipendenti di legge uniforme sull'intervallo $(0, 1)$.

1. Si calcoli la speranza di $V_n := \prod_{i=1}^n U_i$.
2. Definito $V := \lim_{n\to\infty} V_n$, si dimostri che V è ben definito, $V \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ e $\mathbb{E}[V] = 0$.
3. Se ne deduca che $\lim_{n\to\infty} V_n = 0$ q.c.

Esercizio 2. Siano X, Y, Z tre variabili aleatorie indipendenti di legge esponenziale di parametro $\lambda > 0$, e U variabile aleatoria uniforme su $[0, 1]$, indipendente da X, Y, Z.

1. Dimostrare che $\varphi_X = \varphi_{U(Y+Z)}$.

Supponiamo ora che X, Y, Z siano ancora indipendenti da U e tra di loro e abbiano la stessa legge con funzione caratteristica φ, ma non necessariamente legge esponenziale.

2. Dimostrare che $\varphi_{U(Y+Z)} = \frac{1}{t}\int_0^t \varphi^2(u)\, du$.
3. Dimostrare che, se vogliamo che $\varphi_X = \varphi_{U(Y+Z)}$, allora φ deve soddisfare l'equazione differenziale $t\varphi' = \varphi^2 - \varphi$;
4. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale di cui sopra che siano funzioni caratteristiche di una variabile aleatoria.

Esercizio 3. Siano $(X_n)_n$ variabili aleatorie i.i.d. di legge esponenziale di parametro $\lambda > 0$, e N variabile aleatoria geometrica (cioè tale che $\mathbb{P}\{N = n\} = p(1-p)^{n-1}$ per ogni $n \geq 1$). Definiamo poi

$$Y := \sum_{n=1}^{N} X_n$$

1. Calcolare $\mathbb{E}[Y]$.
2. Per ogni $t \geq 0$, calcolare la funzione di ripartizione $F_Y(t)$.
3. Calcolare la funzione caratteristica di Y.
4. Calcolare la funzione generatrice dei momenti di Y.

Esercizio 4. Supponiamo che il fatto che un giorno piova o meno dipenda dal fatto che il giorno prima sia piovuto o meno in questo modo: se un giorno non ha piovuto, allora la probabilità che il giorno seguente non piova è pari a 0.7, mentre se un giorno ha piovuto, allora la probabilità che il giorno seguente piova è pari a 0.5.

1. Definire una catena di Markov che modellizza il fenomeno, specificando spazio degli stati e nucleo di transizione.
2. Se oggi ci sono uguali probabilità che piova o non piova, calcolare la probabilità che fra esattamente 3 giorni piova.
3. Se oggi ha piovuto, calcolare la probabilità che piova anche nei 3 giorni successivi.

Soluzioni

Esercizio 1.

1. Per l'indipendenza delle U_n si ha

$$\mathbb{E}[V_n] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n U_i\right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[U_i] = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$$

2. Dato che le U_n hanno valori in $(0,1)$ q.c., la successione $(V_n)_n$ è q.c. decrescente e positiva, quindi ammette limite q.c.; chiamiamo quindi $V := \lim_{n\to\infty} V_n$. Siccome $V \in [0,1)$, si ha che $V \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Infine

$$\mathbb{E}[V] = \mathbb{E}\left[\lim_{n\to\infty} V_n\right] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[V_n] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

Il limite si può portare fuori dalla speranza per il Teorema della Convergenza Dominata ($|V_n| \le 1 \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ per ogni n), oppure per il Teorema della Convergenza Monotona (definendo $Z_n := 1 - V_n$, si ha che le Z_n sono positive e $Z_n \nearrow Z = 1 - V$ q.c.).

3. Siccome $V \ge 0$ q.c. e $\mathbb{E}[V] = 0$, per un teorema di teoria della misura si ha che $V = \lim_{n\to\infty} V_n = 0$ q.c.

Esercizio 2.

1. Ricordiamo che $Y + Z \sim \Gamma(2, \lambda)$. Per ogni t calcoliamo

$$\begin{aligned}
\varphi_{U(Y+Z)}(t) &= \mathbb{E}[e^{itU(Y+Z)}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{itU(Y+Z)}|U]] = \quad \text{(indipendenza di } Y+Z \text{ da } U\text{)} \\
&= \mathbb{E}[\varphi_{Y+Z}(tU)] = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda - itU}\right)^2\right] = \int_0^1 \left(\frac{\lambda}{\lambda - itu}\right)^2 du = \\
&= \left[\frac{\lambda}{it}\frac{1}{1 - \frac{it}{\lambda}u}\right]_0^1 = \frac{\lambda}{\lambda - it} = \varphi_X(t)
\end{aligned}$$

2. Con calcoli analoghi al punto 1. abbiamo

$$\begin{aligned}
\varphi_{U(Y+Z)}(t) &= \mathbb{E}[e^{itU(Y+Z)}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{itU(Y+Z)}|U]] = \mathbb{E}[\varphi_{Y+Z}(tU)] = \mathbb{E}[\varphi^2(tU)] = \\
&= \int_0^1 \varphi^2(tu)\ du = \frac{1}{t}\int_0^t \varphi^2(v)\ dv
\end{aligned}$$

3. La condizione $\varphi(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \varphi^2(v)\ dv$ è equivalente a

$$t\varphi(t) = \int_0^t \varphi^2(v)\ dv$$

Dato che φ è una funzione caratteristica, si ha che $\varphi \in C^0$, quindi il secondo membro è derivabile con continuità. Derivando si ha

$$t\varphi'(t) + \varphi(t) = \varphi^2(t)$$

che dà la tesi.

4. Dobbiamo cercare tutte le soluzioni complesse tali che $\varphi(0) = 1$ e $\|\varphi\|_\infty \leq 1$. Separando le variabili si ha
$$\int \frac{d\varphi}{\varphi(\varphi - 1)} = \int \frac{dt}{t}$$
da cui si ricava
$$\log t = \log(\varphi - 1) - \log \varphi + C$$
con $C \in \mathbb{C}$. La soluzione generale è quindi
$$\varphi(t) = \frac{K}{K - t}$$
con $K \in \mathbb{C}$, che soddisfa $\varphi(0) = 1$. Abbiamo poi che $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ può essere scritto come
$$\min_{t \in \mathbb{R}} \left| 1 - \frac{t}{K} \right| \geq 1$$
che, utilizzando la definizione di modulo di un numero complesso e rappresentando $K = a + ib$, si può scrivere
$$(1 - ta)^2 + (tb)^2 \geq 1 \quad \forall t$$
che, dopo alcuni conti, dà $(a^2 + b^2)t^2 - 2at \geq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. L'unico modo per soddisfare questa relazione è imporre $a = 0$, e quindi si ottiene $K = ib$, e
$$\varphi(t) = \frac{ib}{ib - t} = \frac{-b}{-b - it}$$

Esercizio 3.

1. Poichè le ipotesi dell'identità di Wald sono soddisfatte, abbiamo
$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[N] = \frac{1}{p}\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda p}$$

Da ciascuno dei tre punti seguenti si ricava che $Y \sim Exp(\lambda p)$, pertanto ognuno dei tre può essere ricavato dagli altri due. Presentiamo quindi solo la dimostrazione del secondo.

2. Per $t < 0$, si ha $\mathbb{P}\{Y \leq t\} = 0$. Per $t \geq 0$, chiamando $\mathbb{Q}_n$ la probabilità $\mathbb{P}$ condizionata all'evento $\{N = n\}$, per le proprietà della disintegrazione abbiamo
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{Y \leq t\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}_n\{\sum_{i=1}^{N} X_i \leq t\}\mathbb{P}\{N = n\} = \quad (\text{cond. a } \{N = n\}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}_n\{\sum_{i=1}^{n} X_i \leq t\}\mathbb{P}\{N = n\} = \quad (\textstyle\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \lambda)) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} \int_0^t \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} e^{-\lambda x} x^{n-1}\, dx = \quad (\text{cambio variabile } k := n - 1) \\
&= p\lambda \int_0^t e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((1-p)\lambda x)^k}{k!}\, dx = p\lambda \int_0^t e^{-\lambda x} e^{(1-p)\lambda x}\, dx = \\
&= p\lambda \int_0^t e^{-p\lambda x}\, dx = 1 - e^{-p\lambda t}
\end{aligned}$$

dove la quarta uguaglianza segue dal teorema di integrazione per serie positive.

3. La funzione caratteristica è

$$\varphi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{itY}] = \frac{p\lambda}{p\lambda - it}$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

4. La funzione generatrice dei momenti è

$$\gamma_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tY}] = \frac{p\lambda}{p\lambda - t}$$

per ogni $t \leq p\lambda$. Questa funzione poteva anche essere ricavata con la formula vista a lezione.

Esercizio 4.

1. Definiamo la catena di Markov $(X_n)_n$ con spazio degli stati $E := \{P, N\}$ (con significato ovvio) e nucleo $N(x, \{y\}) := p_{xy}$, con

$$P = (p_{xy})_{x,y \in E} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

2. In questo caso la legge iniziale è $\mu = \frac{1}{2}\delta_P + \frac{1}{2}\delta_N$. Dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_3 = P\} &= \mathbb{P}\{X_3 = P | X_0 = P\}\mathbb{P}\{X_0 = P\} + \mathbb{P}\{X_3 = P | X_0 = N\}\mathbb{P}\{X_0 = N\} = \\ &= (P^3)_{PP} \cdot \frac{1}{2} + (P^3)_{NP} \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

dove abbiamo usato le proprietà delle catene di Markov; calcolando il cubo della matrice P, otteniamo

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0.38 & 0.62 \\ 0.372 & 0.628 \end{pmatrix}$$

e abbiamo quindi

$$\mathbb{P}\{X_3 = P\} = 0.38 \cdot \frac{1}{2} + 0.372 \cdot \frac{1}{2} = 0.376$$

3. In questo caso la legge iniziale è $\mu = \delta_P$; dobbiamo calcolare

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_3 = X_2 = X_1 = P\} &= \mathbb{P}\{X_3 = X_2 = X_1 = P | X_0 = P\}\mathbb{P}\{X_0 = P\} + \\ &\quad + \mathbb{P}\{X_3 = X_2 = X_1 = P | X_0 = N\}\mathbb{P}\{X_0 = N\} = \\ &= \mathbb{P}\{X_3 = X_2 = X_1 = P | X_0 = P\} \cdot 1 + \\ &\quad + \mathbb{P}\{X_3 = X_2 = X_1 = P | X_0 = N\} \cdot 0 = \\ &= \mathbb{P}\{X_3 = P, X_2 = P, X_1 = P | X_0 = P\} = \\ &= P_{PP} \cdot P_{PP} \cdot P_{PP} = 0.5^3 = 0.125 \end{aligned}$$

Esame di Calcolo delle Probabilità del 4 luglio 2006
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Universitá degli Studi di Padova)
(docente: Tiziano Vargiolu)

Sono ammessi all'orale:

Rosestolato Mauro	30.5

Visione compiti e orali: martedì 11 luglio ore 14.30 nel mio studio, oppure su appuntamento.