Esame di Calcolo delle Probabilità del 19 luglio 2006
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Cognome Nome Matricola

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Somma	Voto finale

Attenzione: si consegnano SOLO i fogli di questo fascicolo.

Esercizio 1. Sia $(X_n)_n$ un processo di Bernoulli di parametro $1/2$ e per ogni $n \geq 1$ definiamo

$$Y_n := 1 - \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} X_k$$

e chiamiamo μ_n la sua legge. Dimostrare che

1. μ_n è concentrata sull'insieme finito $D_n := \{k2^{-n} \mid k = 1, \ldots, 2^n\}$.
2. μ_n è la legge uniforme su D_n.
3. $Y := \lim_{n\to\infty} Y_n$ è ben definito ed è una variabile aleatoria.
4. Y ha legge uniforme su $[0,1]$.

Esercizio 2. Sia $(X_n)_n$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. di legge esponenziale di parametro 1. Definiamo

$$Y_n := \max(X_1, \ldots, X_n), \qquad Z_n := Y_n - \log n$$

1. Calcolare la funzione di ripartizione di Z_n per ogni $n \geq 0$;
2. Calcolare il limite in legge di Z_n;
3. Usare il punto 2 per stimare $\mathbb{P}\{Y_{100} \geq 5\}$.

Esercizio 3. La densità congiunta di (X, Y) rispetto alla misura di Lebesgue bidimensionale è data da

$$f(x,y) := \frac{1}{y} e^{-x/y} e^{-y} \mathbf{1}_{\{x>0, y>0\}}$$

1. Calcolare le densità marginali di X e Y.
2. Calcolare la legge condizionale di Y rispetto a X.
3. Calcolare la legge condizionale di X rispetto a Y.
4. Calcolare $\mathbb{E}[X^2|Y]$.

Esercizio 4. Sia $X = (X_n)_{n\geq 0}$ una catena di Markov. Dimostrare che le seguenti sono catene di Markov, specificandone il nucleo di transizione.

1. $(X_{n+r})_{n\geq 0}$, con $r \geq 0$.
2. $(X_{2n})_{n\geq 0}$.
3. $Y = (Y_n)_{n\geq 0}$, dove $Y_n := (X_n, X_{n+1})$ per ogni $n \geq 0$.

Soluzioni

Esercizio 1. Innanzitutto notiamo che $Y_{n+1} = Y_n - X_n/2^n$.

1. Per induzione: per $n = 1$, abbiamo che $Y_1 = 1 - X_1/2$, quindi è uguale a 1 oppure a 1/2, quindi μ_1 è concentrata su $D_1 = \{1/2, 1\}$. Se poi supponiamo che μ_n sia concentrata su D_n, allora può assumere ogni valore del tipo $k/2^n$, con $k = 1, \dots, 2^n$. Allora $Y_{n+1} = Y_n - X_n/2^n$ può assumere ogni valore del tipo $k/2^n - X_n/2^{n+1}$, con $X_n = 0, 1$, che sono esattamente tutti i valori di D_{n+1}.

2. Ogni elemento di D_n ha uno sviluppo binario del tipo $1 - 0.b_1b_2\dots b_n$, con $b_i = 0, 1$. Abbiamo poi che

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{Y_n = 1 - 0.b_1b_2\dots b_n\} &= \mathbb{P}\left\{\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k} = 0.b_1b_2\dots b_n\right\} = \\ &= \mathbb{P}\{X_k = b_k \forall k = 1, \dots, n\} = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{X_k = b_k\} = \frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

   e abbiamo la tesi.

3. Poichè $Y_{n+1} = Y_n - X_n/2^n$, la successione $(Y_n)_n$ è q.c. decrescente. Inoltre, siccome $X_k = 0, 1$, abbiamo $\sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k} < 1$ per ogni n, e quindi $Y_n > 0$ q.c. per ogni n. Questo implica che la successione $(Y_n)_n$ ammette limite q.c., e per le proprietà delle variabili aleatorie, possiamo definire la variabile aleatoria $Y := \lim_{n\to\infty} Y_n$.

4. Poichè $Y_n \to Y$ q.c., si ha anche $Y_n \to Y$ in legge. Basta allora applicare uno dei criteri equivalenti della convergenza in legge per calcolare la legge di Y. Ad esempio, se chiamiamo F_n la funzione di ripartizione di Y_n, per ogni $t \in (0, 1)$ si ha che

$$F_n(t) = \mathbb{P}\{Y_n \le t\} = \sum_{k/2^n \le t} \frac{1}{2^n} = \frac{[2^n t]}{2^n}$$

   dove $[t]$ è la parte intera di t. Se chiamiamo F la funzione di ripartizione di Y, allora per ogni $t \in (0, 1)$ si ha che

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{[2^n t]}{2^n} = t$$

   che è la funzione di ripartizione della legge uniforme (continua) $U(0, 1)$.

Esercizio 2.

1. Fissato $n \ge 1$, per ogni $t \ge -\log n$ abbiamo

$$\begin{aligned}F_{Z_n}(t) &= \mathbb{P}\{Z_n \le t\} = \mathbb{P}\{Y_n \le t + \log n\} = \mathbb{P}\{X_i \le t + \log n \quad \forall i = 1, \dots, n\} = \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\{X_i \le t + \log n\} = (1 - e^{-t-\log n})^n = \left(1 - \frac{e^{-t}}{n}\right)^n\end{aligned}$$

   mentre per $t < -\log n$, $F_{Z_n}(t) = 0$.

2. Se le funzioni di ripartizione convergono puntualmente ad una funzione di ripartizione, allora questa è la funzione di ripartizione della legge limite. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{e^{-t}}{n}\right)^n = e^{-e^{-t}}$$

quindi le Z_n convergono in legge ad una legge con funzione di ripartizione $e^{-e^{-t}}$, che in effetti è una funzione di ripartizione.

3. Possiamo calcolare

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{Y_{100} \geq 5\} &= \mathbb{P}\{Z_{100} \geq 5 - \log 100\} = 1 - \mathbb{P}\{Z_{100} < 5 - \log 100\} = \\ &= 1 - \mathbb{P}\{Z_{100} \leq 5 - \log 100\} \simeq \\ &\simeq 1 - e^{-e^{-5+\log 100}} = 1 - e^{-100e^{-5}} \end{aligned}$$

dove la terza uguaglianza segue dal fatto che le Z_n hanno una legge assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue, e la quarta ($\simeq$) da una caratterizzazione della convergenza in legge.

Esercizio 3.

1. La densità marginale di X è data, per ogni $x \geq 0$, da

$$f_X(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{y} e^{-x/y} e^{-y} \mathbf{1}_{\{x>0,y>0\}}\, dy = \int_0^\infty \frac{1}{y} e^{-x/y} e^{-y}\, dy$$

ma la primitiva non si riesce a calcolare in termini di funzioni elementari.

La densità marginale di Y è invece, per ogni $y \geq 0$,

$$f_Y(y) \;=\; \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{y} e^{-x/y} e^{-y} \mathbf{1}_{\{x>0,y>0\}}\, dx = \int_0^\infty \frac{1}{y} e^{-x/y} e^{-y}\, dx = e^{-y}$$

quindi $Y \sim Exp(1)$.

2. Dalla teoria vista a lezione, la legge condizionale di Y rispetto a X ammette densità $f_{Y|X}(y|x) = f(x,y)/f_X(x)$ rispetto alla misura di Lebesgue per ogni $x \geq 0$, dove:

$$f_{Y|X}(y|x) := \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{y} e^{-x/y} e^{-y} \mathbf{1}_{\{x>0,y>0\}}}{\int_0^\infty \frac{1}{y} e^{-x/y} e^{-y}\, dy \mathbf{1}_{\{x>0\}}} = \frac{\frac{1}{y} e^{-x/y} e^{-y}}{\int_0^\infty \frac{1}{y} e^{-x/y} e^{-y}\, dy} \mathbf{1}_{\{y>0\}}$$

3. Dalla teoria vista a lezione, la legge condizionale di X rispetto a Y ammette densità $f_{X|Y}(x|y) = f(x,y)/f_Y(y)$ rispetto alla misura di Lebesgue per ogni $y \geq 0$, dove:

$$f_{X|Y}(x|y) := \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{y} e^{-x/y} e^{-y} \mathbf{1}_{\{x>0,y>0\}}}{e^{-y} \mathbf{1}_{\{y>0\}}} = \frac{1}{y} e^{-x/y} \mathbf{1}_{\{x>0\}}$$

e quindi la legge condizionale di X rispetto ad Y è costituita dalla famiglia $(\nu_y)_y$, con $\nu_y = Exp(\frac{1}{y})$.

4. Per i legami tra legge condizionale e speranza condizionale, abbiamo che $\mathbb{E}[X^2|Y] = \varphi(Y)$, dove
$$\varphi(y) \quad := \quad \int x^2 \; d\nu_y(x) = \int x^2 f_{X|Y}(x|y) \; dx = \int_0^\infty x^2 \frac{1}{y} e^{-x/y} \; dx$$
Integrando per parti due volte si ottiene $\varphi(y) = 2y^2$, quindi $\mathbb{E}[X^2|Y] = 2Y^2$.

Esercizio 4. Chiamiamo $N(x, dy)$ il nucleo di transizione di $(X_n)_n$. Per definizione di catena di Markov, abbiamo allora che per ogni $h \in L^+(E, \mathcal{E})$,
$$\mathbb{E}[h(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] = Nh(X_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
dove
$$(Nh)(x) := \int_E h(x)N(x, dy) \qquad \forall x in E$$

1. Fissato $r \geq 0$, abbiamo che la filtrazione generata da $(X_{n+r})_n$ è $(\mathcal{F}_{n+r})_n$. Allora per ogni $h \in L^+(E, \mathcal{E})$,
$$\mathbb{E}[h(X_{n+r+1})|\mathcal{F}_{n+r}] = Nh(X_{n+r}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
e quindi $(X_{n+r})_n$ è una catena di Markov con nucleo di transizione N.
2. La filtrazione generata da $(X_{2n})_n$ è $(\mathcal{F}_{2n})_n$. Allora per ogni $h \in L^+(E, \mathcal{E})$,
$$\mathbb{E}[h(X_{2(n+1)})|\mathcal{F}_{2n}] = \mathbb{E}[h(X_{2n+2)})|\mathcal{F}_{2n}] = (N(Nh))(X_{n+r}) = (N^2h)(X_{n+r}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
e quindi $(X_{2n})_n$ è una catena di Markov con nucleo di transizione N^2.
3. La filtrazione generata da $(Y_n)_n$ è la seguente: per ogni $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathcal{F}^Y_n = \sigma(Y_0, \ldots, Y_n) = \sigma((X_0, X_1), \ldots, (X_n, X_{n+1})) = \sigma(X_0, \ldots, X_{n+1}) = \mathcal{F}^X_{n+1}$$
Allora per ogni $h \in L^+(E^2, \mathcal{E}^{\otimes 2})$,
$$\mathbb{E}[h(Y_{n+1})|\mathcal{F}^Y_n] = \mathbb{E}[h(X_{n+1}, X_{n+2})|\mathcal{F}^X_{n+1}] = \varphi(X_{n+1})$$
poichè il secondo membro è misurabile rispetto a $\sigma(X_{n+1})$ per le proprietà delle catene di Markov, e
$$\varphi(x) := \int_E h(x, z)N(x, dz)$$
Possiamo allora definire il nucleo $\tilde{N}$ da E^2 in sè in questo modo: per ogni $h \in L^+(E^2, \mathcal{E}^{\otimes 2})$,
$$(\tilde{N}h)(y) = (\tilde{N}h)(x_1, x_2) := \int_E h(x_2, z)N(x_2, dz)$$
e abbiamo quindi
$$\mathbb{E}[h(Y_{n+1})|\mathcal{F}^Y_n] = \mathbb{E}[h(X_{n+1}, X_{n+2})|\mathcal{F}^X_{n+1}] = (\tilde{N}h)(X_{n+1})$$
Più "operativamente", se $B_1, B_2 \in \mathcal{E}$, abbiamo
$$\tilde{N}((x_1, x_2), B_1 \times B_2) = (\tilde{N}\mathbf{1}_{B_1 \times B_2})(x_1, x_2) = \int_E \mathbf{1}_{B_1 \times B_2}(x_2, z)N((x_2, dz) = \mathbf{1}_{B_1}(x_2)N(x_2, B_2)$$
quindi in particolare il nucleo di transizione è nullo se la seconda componente non appartiene a B_1.

Esame di Calcolo delle Probabilità del 19 luglio 2006
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Universitá degli Studi di Padova)
(docente: Tiziano Vargiolu)

Sono ammessi all'orale:

Ramo Valentina	17

Visione compiti e orali: venerdì 21 luglio ore 11.00 nel mio studio.