Esame di Calcolo delle Probabilità del 19 settembre 2006
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Cognome Nome Matricola

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Somma	Voto finale

Attenzione: si consegnano SOLO i fogli di questo fascicolo.

Esercizio 1. Consideriamo uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ e una variabile aleatoria $X \in L^+$ tale che $\mathbb{E}[X] = 1$. Definiamo la probabilità

$$\mathbb{Q}(A) := \mathbb{E}[X\mathbf{1}_A] \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

1. Dimostrare che $\int_\Omega Y \, d\mathbb{Q} = \mathbb{E}[XY]$ per ogni $Y \in L^+(\Omega, \mathcal{A})$ (suggerimento: prima supporre Y semplice)

2. Se X è una funzione semplice e $X > 0$ $\mathbb{P}$-quasi certamente, dimostrare che $\mathbb{P}(A) = \int_A \frac{1}{X} \, d\mathbb{Q}$ per ogni $A \in \mathcal{A}$.

Esercizio 2. La funzione caratteristica di X è $\gamma_X(t) = \exp(2e^{it} - 2)$, mentre quella di Y è $\gamma_Y(t) = (\frac{3}{4}e^{it} + \frac{1}{4})^{10}$. Supponiamo anche che le due variabili aleatorie siano indipendenti.

1. Che variabili aleatorie sono?

2. Calcolare $\mathbb{E}[XY]$.

3. Svolgere il punto 2. senza supporre noto il risultato del punto 1.

4. Calcolare $\mathbb{P}\{XY = 0\}$.

Esercizio 3.

1. Dimostrare che, se (X, Y) è un vettore aleatorio continuo con densità

$$f(x, y) := g(x)h(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

rispetto alla misura di Lebesgue bidimensionale, allora X e Y sono indipendenti.

Consideriamo ora il vettore aleatorio (X, Y) con densità

$$f(x, y) := \begin{cases} 2 & \text{se } 0 < x < y < 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

2. Calcola la legge di X condizionata ad Y.

3. Calcola la legge di Y condizionata ad X.

4. Le due variabili aleatorie sono indipendenti? Come si concilia questo con il punto 1.?

Esercizio 4. Su un ponte, ogni cinque camion quattro sono seguiti da un'automobile, mentre una automobile su sei è seguita da un camion.

1. Modellizzare il fenomeno con una catena di Markov $(X_n)_n$ a valori nell'insieme $\{A, C\}$, specificandone la matrice di transizione.

2. Supponiamo che sia appena passato un camion, e definiamo

$$\tau := \inf\{n | X_n = C\}$$

come il tempo da attendere perchè passi il prossimo camion. Calcolare $\mathbb{P}\{\tau = n\}$ per ogni $n \geq 1$.

Soluzioni

Esercizio 1.

1. Se Y è variabile aleatoria semplice, sia $Y = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$ la sua rappresentazione standard, con $a_i \geq 0$ e $A_i \in \mathcal{A}$ disgiunti. Allora

$$\begin{aligned}\int_\Omega Y \, d\mathbb{Q} &= \int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i} \, d\mathbb{Q} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{Q}(A_i) = \sum_{i=1}^n a_i \int_{A_i} X \, d\mathbb{P} = \\ &= \int_\Omega X \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i} \, d\mathbb{P} = \int_\Omega XY \, d\mathbb{P} = \mathbb{E}[XY]\end{aligned}$$

   Se $Y \in L^+$, allora esiste una successione $(Y_n)_n$ di funzioni semplici in L^+ tale che $Y_n \nearrow Y$. Allora anche $XY_n \nearrow XY$, e per Beppo Levi si ha:

$$\int_\Omega Y \, d\mathbb{Q} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega Y_n \, d\mathbb{Q} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega Y_n X \, d\mathbb{P} = \int_\Omega XY \, d\mathbb{P}$$

2. Scriviamo X in rappresentazione standard come $X = \sum_{i=1}^n a_n \mathbf{1}_{A_n}$, con gli $(A_n)_n$ non trascurabili e tali che $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_n) = 1$ e $a_n > 0$. Siccome X vale $a_i > 0$ su A_i, allora $1/X$ vale $1/a_i$ su A_i, e quindi è q.c. ben definita. Allora:

$$\begin{aligned}\int_A \frac{1}{X} \, d\mathbb{Q} &= \int_A \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \mathbf{1}_{A_n} \, d\mathbb{Q} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \int_{A_i \cap A} d\mathbb{Q} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \mathbb{Q}(A_i \cap A) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \int_{A_i \cap A} X \, d\mathbb{P} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \int_{A_i \cap A} a_i \, d\mathbb{P} = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} a_i \mathbb{P}(A_i \cap A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i \cap A) = \mathbb{P}(A)\end{aligned}$$

   Una dimostrazione alternativa, che non richiede nemmeno che X sia semplice, è la seguente. Per un generico $A \in \mathcal{A}$, poniamo $Y := \frac{1}{X} \mathbf{1}_A$. Allora Y è q.c. ben definita e appartiene ad L^+. Per il punto 1., abbiamo allora

$$\int_A \frac{1}{X} \, d\mathbb{Q} = \int_\Omega \frac{1}{X} \mathbf{1}_A \, d\mathbb{Q} = \mathbb{E}\left[X \frac{1}{X} \mathbf{1}_A\right] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A] = \mathbb{P}(A)$$

Esercizio 2.

1. Si vede facilmente che $X \sim Po(2)$, e $Y \sim B(10; 3/4)$.

2. Sfruttando le proprietà delle leggi di X e Y e la loro indipendenza, si ha che

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 2 \cdot \left(10 \cdot \frac{3}{4}\right) = 15$$

3. Per calcolare $\mathbb{E}[XY]$, supponiamo che $X, Y \in L^1$. Allora sappiamo che $\gamma_X'(0) = i\mathbb{E}[X]$ e così pure per la Y. Abbiamo quindi

$$\gamma_X'(t) = 2ie^{it}\exp(2(e^{it}-1)),$$
$$\gamma_Y'(t) = 10 \cdot \frac{3}{4}ie^{it}\left(\frac{3}{4}e^{it}+\frac{1}{4}\right)^9,$$

abbiamo

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = (-i \cdot 2i)\left(-i \cdot 10 \cdot \frac{3}{4}i\right) = 2 \cdot \frac{15}{2} = 15$$

4. Per avere $XY = 0$ basta che lo sia almeno una tra X o Y. Si ha quindi che

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{XY=0\} &= 1-\mathbb{P}\{XY \neq 0\} = 1-\mathbb{P}\{X \neq 0, Y \neq 0\} \\
&= 1-\mathbb{P}\{X \neq 0\}\mathbb{P}\{Y \neq 0\} = 1-(1-\mathbb{P}\{X=0\})(1-\mathbb{P}\{Y-0\}) = \\
&= 1-(1-e^{-2})\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right) = 0.14
\end{aligned}$$

Esercizio 3.

1. Senza perdita di generalità possiamo supporre che $\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} h(y)\,dy = 1$. Per ogni $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ si ha:

$$\mathbb{P}\{X \in A, Y \in B\} = \mathbb{P}\{(X,Y) \in A \times B\} = \int\int_{A\times B} g(x)h(y)\,dx\,dy = \int_A g(x)\,dx \int_B h(y)\,dy$$

dove abbiamo usato il teorema di Tonelli. Ponendo $B = \mathbb{R}$ si ha

$$\mathbb{P}\{X \in A\} = \int_A g(x)\,dx$$

e ponendo $A = \mathbb{R}$ si ha

$$\mathbb{P}\{Y \in B\} = \int_A g(x)\,dx$$

Mettendo insieme le ultime tre equazioni, si ha la tesi.

2. La densità marginale di Y è data, per ogni $y \in (0,1)$,

$$f_Y(y) \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx = \int_0^y 2\mathbf{1}_{(0,1)}(y)\,dx = 2y\mathbf{1}_{(0,1)}(y)$$

quindi, per la teoria vista a lezione, la legge condizionale di X rispetto a Y ammette densità $f_{X|Y}(x|y) = f(x,y)/f_Y(y)$ rispetto alla misura di Lebesgue per ogni $y \in (0,1)$, dove:

$$f_{X|Y}(x|y) := \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2\mathbf{1}_{\{0<x<y<1\}}}{2y\mathbf{1}_{\{0<y<1\}}} = \frac{1}{y}\mathbf{1}_{(0,y)}(x)$$

e quindi la legge condizionale di X rispetto ad Y è costituita dalla famiglia $(\nu_y)_y$, dove ν_y è la legge uniforme sull'intervallo $(0,y)$.

3. La densità marginale di X è data, per ogni $x \in (0,1)$,

$$f_X(x) \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\; dy = \int_x^1 2\mathbf{1}_{(0,1)}(x)\; dy = 2(1-x)\mathbf{1}_{(0,1)}(x)$$

quindi, per la teoria vista a lezione, la legge condizionale di Y rispetto a X ammette densità $f_{Y|X}(y|x) = f(x,y)/f_X(x)$ rispetto alla misura di Lebesgue per ogni $x \in (0,1)$, dove:

$$f_{Y|X}(y|x) := \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{2\mathbf{1}_{\{0<x<y<1\}}}{2(1-x)\mathbf{1}_{\{0<x<1\}}} = \frac{1}{1-x}\mathbf{1}_{(x,1)}(y)$$

e quindi la legge condizionale di Y rispetto ad X è costituita dalla famiglia $(\nu_x)_x$, dove ν_x è la legge uniforme sull'intervallo $(x,1)$.

4. Le due variabili aleatorie non sono indipendenti: se lo fossero, le loro leggi condizionali non dipenderebbero dall'altra variabile come invece fanno. Questo perchè la densità non è della forma $f(x,y) = g(x)h(y)$, poichè $\mathbf{1}_{\{0<x<y<1\}}$ non si può fattorizzare in questa forma.

Esercizio 4.

1. Definiamo la catena di Markov $(X_n)_n$ con spazio degli stati $E := \{A, C\}$ (con significato ovvio) e nucleo $N(x,\{y\}) := p_{xy}$, con

$$P = (p_{xy})_{x,y\in E} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

2. In questo caso la legge iniziale è $\mu = \delta_C$. Se $n \geq 2$, abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\tau = n\} &= \mathbb{P}\{X_1 = \ldots = X_{n-1} = A, X_n = C \mid X_0 = C\} = \\ &= p_{CA} \cdot p_{AA}^{n-2} \cdot p_{AC} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \end{aligned}$$

dove abbiamo usato le proprietà delle catene di Markov e il fatto che l'evento $\{X_0 = C\}$ è certo. Per $n = 1$ abbiamo invece

$$\mathbb{P}\{\tau = 1\} = \mathbb{P}\{X_1 = C \mid X_0 = C\} = p_{CC} = \frac{1}{5}$$

Esame di Calcolo delle Probabilità del 19 settembre 2006
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Universitá degli Studi di Padova)
(docente: Tiziano Vargiolu)

Sono ammessi all'orale:

Visione compiti e orali: giovedì 21 settembre ore 16.00 nel mio studio.