Esame di Calcolo delle Probabilità del 11 dicembre 2007
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Cognome Nome Matricola

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Somma	Voto finale

Attenzione: si consegnano SOLO i fogli di questo fascicolo.

Esercizio 1. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato, e $\mathcal{B}$ una sotto-σ-algebra di $\mathcal{A}$. Sia inoltre $\mathbb{Q} << \mathbb{P}$, con $Z := \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$.

1. Dimostrare che $B := \{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z|\mathcal{B}] = 0\} \in \mathcal{B}$.
2. Dimostrare che $\mathbb{Q}(B) = 0$.
3. Dimostrare che, per ogni variabile aleatoria reale limitata X, è ben definita
$$L := \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[XZ|\mathcal{B}]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z|\mathcal{B}]}$$
4. Dimostrare che per ogni $A \in \mathcal{B}$ vale $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[L\mathbf{1}_A]$.
5. Dedurne che vale la *formula di Bayes generalizzata*
$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X|\mathcal{B}] = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[XZ|\mathcal{B}]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z|\mathcal{B}]}$$

Esercizio 2. Il tempo di funzionamento (in giorni) di un componente prima di guastarsi è una variabile aleatoria di densità $f(x) := 2x\mathbf{1}_{(0,1)}(x)$ rispetto alla misura di Lebesgue. Supponiamo che appena questi componenti si guastano vengano rimpiazzati, e denotiamo con X_i il tempo di vita dell'i-esimo componente, e con $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ il momento dell'n-esimo guasto.

1. Calcolare $\mathbb{E}[X_i]$.
2. Supponendo che le $(X_i)_i$ siano indipendenti, calcolare il tasso di guasto a lungo termine
$$r := \lim_{n\to\infty} \frac{n}{S_n}$$
3. Quanti componenti sono necessari perchè la scorta, con probabilità pari al 90%, sia sufficiente per almeno 35 giorni?

Esercizio 3. Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità congiunta
$$f(x,y) := \frac{|x|}{\sqrt{8\pi}} \exp\left(-|x| - \frac{1}{2}x^2y^2\right), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

1. Trovare le densità marginali di X e Y.
2. Trovare la legge di Y condizionale a X.
3. Calcolare $\mathbb{E}[Y|X]$.

Esercizio 4. Su un ponte, ogni cinque camion quattro sono seguiti da un'automobile, mentre una automobile su sei è seguita da un camion.

1. Modellizzare il fenomeno con una catena di Markov $(X_n)_n$ a valori nell'insieme $\{A, C\}$, specificandone la matrice di transizione.
2. Supponiamo che sia appena passato un'auto, e definiamo
$$\tau := \inf\{n | X_n = A\}$$
come il tempo da attendere perchè passi la prossima auto. Calcolare $\mathbb{P}\{\tau = n \mid X_0 = A\}$ per ogni $n \geq 1$.
3. Che proporzioni ci attendiamo, per n grande, per le auto e i camion?

Soluzioni

Esercizio 1.

1. Per definizione di speranza condizionale, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z|\mathcal{B}]$ è $\mathcal{B}$-misurabile. Questo significa che per ogni $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z|\mathcal{B}] \in A\} \in \mathcal{B}$; se prendiamo $A = \{0\}$, allora abbiamo che $B = \{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z|\mathcal{B}] = 0\} \in \mathcal{B}$.

2. Sfruttando la definizione di $\mathbb{Q}$ e le proprietà della speranza condizionale abbiamo

$$\mathbb{Q}(B) = \int_B Z \, d\mathbb{P} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_B Z] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_B Z|\mathcal{B}]] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_B \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z|\mathcal{B}]] = 0$$

poichè $\mathbf{1}_B \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z|\mathcal{B}] \equiv 0$.

3. Siccome $Z \geq 0$, allora $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z|\mathcal{B}] \geq 0$ $\mathbb{P}$-quasi certamente; inoltre per il punto 2., $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z|\mathcal{B}] > 0$ $\mathbb{Q}$-quasi certamente. Inoltre, siccome $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ e X è limitata (chiamiamo K una costante che la limiti), abbiamo che $XZ \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$; infatti

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|XZ|] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X|Z] \leq K\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z] = K < +\infty$$

Allora è ben definita $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[XZ|\mathcal{B}]$; di conseguenza possiamo definire la variabile aleatoria

$$L := \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[XZ|\mathcal{B}]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z|\mathcal{B}]}$$

che rimane ben definita $\mathbb{Q}$-quasi certamente.

4. Per ogni $A \in \mathcal{B}$, sfruttando la definizione di speranza condizionale e la proprietà di proiezione abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[L\mathbf{1}_A] &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L\mathbf{1}_A Z] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L\mathbf{1}_A Z|\mathcal{B}]] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L\mathbf{1}_A \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z|\mathcal{B}]] = \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[XZ|\mathcal{B}]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z|\mathcal{B}]}\mathbf{1}_A \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z|\mathcal{B}]\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[XZ|\mathcal{B}]\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[XZ\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X\mathbf{1}_A] \end{aligned}$$

5. Siccome L è $\mathcal{B}$-misurabile, per l'unicità della speranza condizionale il punto 4. significa che $L = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X|\mathcal{B}]$, e segue la formula.

Esercizio 2.

1. Dato che le X_i sono variabili aleatorie assolutamente continue e limitate, la loro speranza si calcola come

$$\mathbb{E}[X_i] = \int_0^1 x \cdot 2x \, dx = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

2. Siccome le $(X_i)_i$ sono i.i.d. e in L^1, per la legge forte dei grandi numeri di Kolmogorov-Khintchine abbiamo che $S_n/n \to \mathbb{E}[X_i] = \frac{2}{3}$ quasi certamente. Per le proprietà della convergenza quasi certa, abbiamo che

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{S_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

3. Innanzitutto calcoliamo

$$\mathbb{E}[X_i^2] = \int_0^1 x^2 \cdot 2x\ dx = \left[\frac{2}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

e quindi Var $[X_i] = \mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}[X_i]^2 = \frac{1}{2} - (\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{18}$. Dato che sicuramente $X_i \leq 1$, abbiamo che sicuramente $S_n \geq 35$ implica $n \geq 35$, e quindi n dovrebbe essere abbastanza grande da poter applicare il teorema limite centrale. Abbiamo allora

$$0.90 = \mathbb{P}\{S_n \geq 35\} = \mathbb{P}\left\{\frac{S_n - n\mathbb{E}[X_i]}{\sqrt{n\text{Var }[X_i]}} \geq \frac{35 - \frac{2}{3}n}{\sqrt{\frac{1}{18}n}}\right\} \simeq 1 - \Phi\left(\frac{35 - \frac{2}{3}n}{\sqrt{\frac{1}{18}n}}\right)$$

dove Φ è la funzione di ripartizione di una legge $N(0,1)$. Da questo segue

$$\Phi\left(\frac{35 - \frac{2}{3}n}{\sqrt{\frac{1}{18}n}}\right) \simeq 0.1$$

cioè

$$\frac{35 - \frac{2}{3}n}{\sqrt{\frac{1}{18}n}} \simeq q_{0.1} = -q_{0.9} = -1.29$$

e quindi

$$35 \cdot 3 - 2n = -1.29\sqrt{\frac{1}{2}n} = -\frac{1.29}{2}\sqrt{2n} = -0.909\sqrt{n}$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado in $\sqrt{n}$, si trovano le soluzioni $\sqrt{n} = \frac{1.075 \pm 29}{4}$. Siccome chiaramente bisogna prendere la soluzione positiva, si ha $\sqrt{n} \simeq 7.5$ e $n \simeq 7.5^2 = 56.25$. Ne segue che per $n \geq 57$ si ha la condizione richiesta.

Esercizio 3.

1. Per trovare le densità marginali procediamo come segue. Innanzitutto notiamo che sia X che Y sono simmetriche. Una versione della densità marginale di X è data da

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\ dy = \frac{|x|}{2\sqrt{2\pi}}e^{-|x|}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2y^2}\ dy = \frac{|x|}{2\sqrt{2\pi}}e^{-|x|}\sqrt{\frac{2\pi}{x^2}} = \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

se $x \neq 0$, mentre $f_X(0) = \int_{\mathbb{R}} f(0,y)\ dy = \int_{\mathbb{R}} 0\ dy = 0$.

Una versione della densità marginale di Y è data da

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\ dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{x}{2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-x - \frac{1}{2}x^2y^2\right)\ dx = \\ &= e^{\frac{1}{2y^2}} \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x|y| + \frac{1}{|y|})^2}\ dx = \\ &= e^{\frac{1}{2y^2}} \int_{1/|y|}^{+\infty} \frac{\frac{u}{y^2} - \frac{1}{|y|^3}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}\ du = \\ &= e^{\frac{1}{2y^2}} \left(\left[\frac{1}{y^2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2}\right]_{1/y}^{+\infty} - \frac{1}{|y|^3}\int_{1/|y|}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2}\ du\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}y^2} - \frac{e^{\frac{1}{2y^2}}}{|y|^3}\Phi\left(-\frac{1}{|y|}\right) \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il cambio di variabile $u := x|y| + 1/|y|$ e denotiamo con Φ la funzione di ripartizione di una legge $N(0,1)$.

2. Innanzitutto notiamo che $f_X \neq 0$ per ogni $x \neq 0$. Definiamo quindi la famiglia di leggi $(\nu_x)_{x\neq 0}$, dove ν_x ha densità, rispetto alla misura di Lebesgue, data da
$$f_{Y|X}(y|x) := \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{|x|}{\sqrt{8\pi}} \exp\left(-|x| - \frac{1}{2}x^2y^2\right)}{\frac{1}{2}e^{-|x|}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi}{x^2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2y^2\right)$$
quindi $\nu_x = N(0, \frac{1}{x^2})$.

3. Basta utilizzare la formula $\mathbb{E}[Y|X] = g(X)$, dove
$$g(x) := \int_{\mathbb{R}} y \; d\nu_x(y) = \int_{\mathbb{R}} y \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi}{x^2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2y^2\right) \; dy = 0$$
che si può anche ricavare dal fatto che la media di una variabile aleatoria Y che abbia una legge $N(0, \frac{1}{x^2})$ è nulla.

Esercizio 4.

1. Definiamo la catena di Markov $(X_n)_n$ con spazio degli stati $E := \{A, C\}$ (con significato ovvio) e nucleo $N(x, \{y\}) := p_{xy}$, con
$$P = (p_{xy})_{x,y\in E} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

2. In questo caso la legge iniziale è $\mu = \delta_A$. Se $n \geq 2$, abbiamo
$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\tau = n \mid X_0 = A\} &= \mathbb{P}\{X_1 = \ldots = X_{n-1} = C, X_n = A \mid X_0 = A\} = \\ &= p_{AC} \cdot p_{CC}^{n-2} \cdot p_{CA} = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-2} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \end{aligned}$$
dove abbiamo usato le proprietà delle catene di Markov. Per $n = 1$ abbiamo invece
$$\mathbb{P}\{\tau = 1\} = \mathbb{P}\{X_1 = A \mid X_0 = A\} = p_{AA} = \frac{5}{6}$$

3. Dato che $p_{xy} > 0$ per ogni $x, y \in \{A, C\}$, P è regolare e quindi esiste un'unica misura invariante π, con la proprietà che $X_n \rightharpoonup \pi$ per ogni legge iniziale. Per trovarla risolviamo il sistema $\pi = \pi P$, che ci dà
$$\begin{cases} \pi_A = \frac{5}{6}\pi_A + \frac{4}{5}\pi_C \\ \\ \pi_C = \frac{1}{6}\pi_A + \frac{1}{5}\pi_C \end{cases}$$
che implica $\frac{1}{6}\pi_A = \frac{4}{5}\pi_C$. Siccome cerchiamo una misura π che sia anche di probabilità, imponendo $\pi_A + \pi_C = 1$ troviamo la soluzione $\pi = (\frac{24}{29}, \frac{5}{29})$.

Esame di Calcolo delle Probabilità del 11 dicembre 2007
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Universitá degli Studi di Padova)
(docente: Tiziano Vargiolu)

Hanno superato la prova:

Bernardi Cinzia	$15.5 + 3^{+++}$
Lazzaretti Anna	$16.5 + 3^{+++}$
Moressa Mirto	19.5
Spimpolo Doris	$19 + 1^{-}$
Trevisan Marco	20.5

Visione compiti corretti, registrazione voto e/o orali: giovedì 13 dicembre ore 14.30, oppure lunedì 17 ore 10 nel mio studio.