Esame di Calcolo delle Probabilità del 7 gennaio 2008
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Cognome Nome Matricola

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Somma	Voto finale

Attenzione: si consegnano SOLO i fogli di questo fascicolo.

Esercizio 1. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato, e X, Y due processi di Bernoulli indipendenti tra di loro di parametro rispettivamente p_1, p_2; chiamiamo poi anche $q_i := 1-p_i$ per $i = 1, 2$. Denotiamo con T e con U l'istante del primo successo rispettivamente di X e di Y, cioè

$$\begin{aligned} T &:= \inf\{n \geq 1 \mid X_n = 1\}, \\ U &:= \inf\{n \geq 1 \mid Y_n = 1\}, \end{aligned}$$

Definiamo l'evento $H := \{T < U\}$.

1. Calcolare $\mathbb{P}(H)$.
2. Denotando $\mathbb{P}_H := \mathbb{P}(\cdot \mid H)$, dimostrare che $\mathbb{P}_H$ è una misura di probabilità assolutamente continua rispetto a $\mathbb{P}$.
3. Dimostrare che $T \sim Ge(1 - q_1 q_2)$ rispetto a $\mathbb{P}_H$.

Esercizio 2. Si supponga che il numero di articoli prodotto quotidianamente dalla fabbrica A sia una variabile aleatoria di media 20 e deviazione standard 3, e che quelli prodotti dalla fabbrica B sia una variabile aleatoria di media 18 e deviazione standard 6 (ricordiamo che la deviazione standard è uguale alla radice quadrata della varianza). Supponendo che le due fabbriche operino in modo indipendente tra loro:

1. si ottenga un limite superiore per la probabilità che oggi la fabbrica B abbia prodotto più di A;
2. supponendo che valga l'approssimazione normale, si approssimi la probabilità che negli ultimi 30 giorni la fabbrica B abbia prodotto più di A.

Esercizio 3. Siano X, Y, $(U_n)_n$ variabili aleatorie indipendenti tali che le $(U_n)_n$ sono uniformi su $[0, 1]$ e X, Y hanno densità discreta data da

$$\mathbb{P}\{X = m\} = (e-1)e^{-m}, \qquad \mathbb{P}\{Y = n\} = \frac{1}{(e-1)n!}$$

per $m, n \geq 1$. Definiamo poi $M := \max(U_1, \ldots, U_Y)$ e $Z := X - M$.

1. Trovare funzione di ripartizione e densità di M.
2. Dimostrare che X e M sono indipendenti.
3. Trovare funzione di ripartizione e densità di Z.

Esercizio 4. Consideriamo una catena di Markov X sullo spazio degli stati $E := \{0, 1, \dots, m\}$, con $m > 2$, con matrice di transizione definita da

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 - \dfrac{i}{m} & \text{se } j = i + 1 \\[2ex] \dfrac{i}{m} & \text{se } j = i - 1 \\[2ex] 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e legge iniziale $\mu = \delta_i$, con $i \in \{0, 1, \dots, m\}$.

1. Dimostrare che tutti gli stati di E sono ricorrenti.
2. Dimostrare che $p_{ij}^{(k)} = \mathbb{P}\{X_k = j \mid X_0 = i\} \neq 0$ solo se $i - j$ ha la stessa parità di k (cioè pari se k è pari e dispari se k è dispari). In particolare, X non può essere regolare.
3. Dimostrare che se $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ è misura invariante, allora deve soddisfare

$$\pi_k = \binom{m}{k} \pi_0 \qquad \forall k = 1, \dots, m$$

4. Dimostrare che l'unica probabilità invariante è la legge $B(m, \frac{1}{2})$.

Soluzioni

Esercizio 1.

1. Siccome X e Y sono indipendenti tra di loro, lo sono anche T e U. Calcoliamo allora

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{T < U\} &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\{T < U, T = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\{U > k, T = k\} = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\{U > k\}\mathbb{P}\{T = k\} = \sum_{k=1}^{\infty}(1-p_2)^k p_1 (1-p_1)^{k-1} = \\
&= p_1(1-p_2)\sum_{k=0}^{\infty}(1-p_2)^k(1-p_1)^k = \frac{p_1 q_2}{1 - q_1 q_2}
\end{aligned}$$

2. Per le proprietà viste a lezione, $\mathbb{P}(\cdot \mid H)$ è una probabilità assolutamente continua rispetto a $\mathbb{P}$, e in particolare la sua densità rispetto a $\mathbb{P}$ è data da $\frac{1}{\mathbb{P}(H)}\mathbf{1}_H$.

3. La legge di T rispetto a $\mathbb{P}_H$ è caratterizzata dalla sua densità discreta: per ogni $k \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_H\{T = k\} &= \mathbb{P}(\{T = k\} \mid H) = \frac{\mathbb{P}\{T = k, T < U\}}{\mathbb{P}\{T < U\}} = \frac{(1-p_2)^k p_1 (1-p_1)^{k-1}}{\frac{p_1 q_2}{1 - q_1 q_2}} = \\
&= (1 - q_1 q_2)(q_1 q_2)^{k-1}
\end{aligned}$$

Esercizio 2.

1. Chiamiamo X_i e Y_i rispettivamente il numero di articoli prodotto dalle fabbriche A e B nel giorno i, e definiamo $Z_i := Y_i - X_i$. Se a priori non sappiamo se possiamo usare l'approssimazione normale, ricordando che X_i e Y_i sono variabili aleatorie intere, abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{Y_i > X_i\} &= \mathbb{P}\{Z_i \geq 1\} = \mathbb{P}\{Z_i - \mathbb{E}[Z_i] \geq 1 - \mathbb{E}[Z_i]\} = \mathbb{P}\{Z_i + 2 \geq 3\} = \\
&= 1 - \mathbb{P}\{Z_i + 2 \leq 2\} \leq 1 - \mathbb{P}\{|Z_i + 2| \leq 2\} = \mathbb{P}\{(Z_i + 2)^2 > 3^2\} \leq \\
&\leq \frac{\text{Var}\,[Z_i + 2]}{9} = \frac{6^2 + 3^2}{9} = \frac{45}{9} = 5
\end{aligned}$$

che però, essendo maggiore di 1, è una limitazione banale.

2. Poichè le Z_i hanno valori interi, utilizzando la correzione di continuità calcoliamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{30} Z_i > 0\right\} &= \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{30} Z_i \geq 0.5\right\} = \mathbb{P}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{30} Z_i - 30(-2)}{\sqrt{30 \cdot 45}} \geq \frac{0.5 - 30(-2)}{\sqrt{30 \cdot 45}}\right\} = \\
&= \mathbb{P}\left\{Z^* \geq \frac{60.5}{15\sqrt{6}}\right\} \simeq 1 - \Phi(1.64) = 1 - 0.94950 = 0.05050
\end{aligned}$$

Esercizio 3.

1. Per ogni $t \in (0,1)$, abbiamo

$$\begin{aligned} F_M(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{M \le t, Y = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\max(U_1,\dots,U_n) \le t, Y = n\} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{Y = n\}\mathbb{P}\{\max(U_1,\dots,U_n) \le t\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{Y = n\}\mathbb{P}\{U_i \le t \quad \forall i = 1,\dots,n\} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(e-1)n!} \cdot t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(e-1)n!} - \frac{1}{e-1} = \frac{1}{e-1}(e^t - 1) = \frac{e^t - 1}{e-1} \end{aligned}$$

   Siccome $F_M \in C^1$, allora M ammette densità uguale a

$$f_M(t) = F'_M(t) = \frac{e^t}{e-1}\mathbf{1}_{(0,1)}(t)$$

2. M dipende solo da $Y, (U_r)_r$, mentre X è indipendente da $Y, (U_r)_r$, quindi M è indipendente da X.

3. Poichè M è una variabile aleatoria assolutamente continua, possiamo calcolare facilmente la funzione di ripartizione di $-M$,

$$F_{-M}(t) = \mathbb{P}\{-M \le t\} = \mathbb{P}\{-M < t\} = \mathbb{P}\{M > -t\} = 1 - \mathbb{P}\{M \le -t\} = \frac{e - e^{-t}}{e-1}$$

   e la densità

$$f_{-M}(t) = F'_{-M}(t) = \frac{e^{-t}}{e-1}\mathbf{1}_{(-1,0)}(t)$$

   Siccome $Z = X + (-M)$ e $-M$ è dotato di densità rispetto alla misura di Lebesgue, per la teoria vista a lezione anche Z ammette densità che, chiamando μ la legge di X, è pari a

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int f_{-M}(z-x)\ \mu(dx) = \sum_{m=1}^{\infty} f_{-M}(z-m)(e-1)e^{-m} = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-(z-m)}}{e-1}\mathbf{1}_{(-1,0)}(z-m)(e-1)e^{-m} = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-z}\mathbf{1}_{(m-1,m)}(z) = \\ &= e^{-z}\sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{1}_{(m-1,m)}(z) = e^{-z} \end{aligned}$$

   quindi $Z \sim Exp(1)$, e la sua funzione di ripartizione è pari a $F_Z(z) = 1 - e^{-z}$.

Esercizio 4.

1. Siccome E è finito, esiste almeno uno stato ricorrente. Inoltre tutti gli stati comunicano; difatti, se $i, j \in E$, $i \neq j$, allora (supponendo per semplicità di notazione che $i < j$)

$$p_{ij}^{(|i-j|)} \geq p_{i,i+1}p_{i+1,i+2} \cdot \ldots \cdot p_{j-1,j} > 0$$

Siccome tutti gli stati comunicano e ne esiste almeno uno ricorrente, allora tutti gli stati sono ricorrenti.

2. Per induzione su k: se $k = 1$, allora $p_{ij} > 0$ solo se $|i - j| = 1$. Supponiamo ora di avere dimostrato la tesi per k. Allora

$$p_{ij}^{k+1} = \sum_{\ell} p_{i\ell}^{(k)} p_{\ell j} = p_{i,j-1}^{(k)} p_{j-1,j} + p_{i,j+1}^{(k)} p_{j+1,j}$$

e questo è maggiore di zero solo se $i - (j - 1) \equiv k \pmod{2}$ oppure $i - (j + 1) \equiv k \pmod{2}$, ed entrambe queste equazioni sono equivalenti a $i - j \equiv k + 1 \pmod{2}$.

3. Il vettore π è soluzione di $\pi = \pi P$, cioè

$$\begin{cases} \pi_0 &= \frac{1}{m}\pi_1, \\ \pi_1 &= \pi_0 + \frac{2}{m}\pi_2, \\ \pi_2 &= \frac{m-1}{m}\pi_1 + \frac{3}{m}\pi_3, \\ \vdots & \\ \pi_k &= \frac{m-k+1}{m}\pi_{k-1} + \frac{k+1}{m}\pi_{k+1}, \\ \vdots & \\ \pi_m &= \frac{1}{m}\pi_{m-1}. \end{cases}$$

che si può risolvere, per induzione su k, in funzione di π_0:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= m\pi_0 = \binom{m}{1}\pi_0, \\ \pi_2 &= \frac{m}{2}(\pi_1 - \pi_0) = \frac{m}{2}(m-1)\pi_0 = \binom{m}{2}\pi_0, \\ &\vdots \\ \pi_{k+1} &= \frac{m}{k+1}\left(\pi_k - \frac{m-k+1}{m}\pi_{k-1}\right) = \frac{m}{k+1}\left(\binom{m}{k} - \frac{m-k+1}{m}\binom{m}{k-1}\right)\pi_0 = \\ &= \frac{m}{k+1}\frac{(m-1)!}{k!(m-k)!}(m-k)\pi_0 = \frac{m!}{(k+1)!(m-k-1)!}\pi_0 = \binom{m}{k+1}\pi_0, \\ &\vdots \\ \pi_m &= \frac{1}{m}\pi_{m-1} = \frac{1}{m}\binom{m}{m-1}\pi_0 = \binom{m}{m}\pi_0 \end{aligned}$$

Un modo alternativo per ottenere il risultato è il seguente: cerchiamo π che soddisfi $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$ per ogni i, j; ovviamente questa relazione sarà non banale solo se $|i - j| =$

1, e si ha:

$$
\begin{aligned}
j = i+1 \quad &\Rightarrow \quad \pi_i \left(1 - \frac{i}{m}\right) = \pi_{i+1} \frac{i+1}{m}, \\
j = i-1 \quad &\Rightarrow \quad \pi_i \frac{i}{m} = \pi_{i+1} \left(1 - \frac{i-1}{m}\right),
\end{aligned}
$$

che implicano entrambe

$$
\pi_{i+1} = \pi_i \frac{m-i}{i+1} = \pi_0 \prod_{k=0}^{i} \frac{m-k}{k+1} = \pi_0 \frac{m!}{(m-i-1)!(i+1)!} = \binom{m}{i+1} \pi_0
$$

4. Basta imporre che $\sum_{k=0}^{m} \pi_k = 1$, e si ha

$$
1 = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \pi_0 = \pi_0 2^m
$$

quindi $\pi_0 = 2^{-m}$, e in generale

$$
\pi_k = \binom{m}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^m = \binom{m}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{m-k}
$$

e si ha la tesi.

Esame di Calcolo delle Probabilità del 7 gennaio 2008
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Universitá degli Studi di Padova)
(docente: Tiziano Vargiolu)

Hanno superato la prova:

Carraretto Elena	$16 + 1^+$
Punzi Alessandro	$16.5 + 1^-$

Visione compiti corretti, registrazione voto e/o orali: giovedì 10 gennaio ore 14.30 nel mio studio.