Esame di Calcolo delle Probabilità del 15 dicembre 2010
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Cognome Nome Matricola

Laurea quadriennale	☐
Laurea triennale (DM 509)	☐
Laurea (triennale DM 270)	☐
Laurea specialistica (DM 509)	☐
Laurea magistrale (DM 270)	☐

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Somma	Voto finale

Attenzione: si consegnano SOLO i fogli di questo fascicolo.

Esercizio 1. Siano X, Y variabili aleatorie indipendenti entrambe di legge $U(0,1)$, e poniamo

$$T := X \vee Y, \qquad U := \frac{X \wedge Y}{T}$$

1. Calcolare la legge congiunta di (T, U).
2. Calcolare la densità marginale di T.
3. Calcolare la densità marginale di U.
4. T e U sono indipendenti? Se sì, qual è la loro densità congiunta?

Esercizio 2. Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processo stocastico definito da $X_0 := x \in \mathbb{R}$ e, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} := aX_n + W_{n+1}$$

con $a \in \mathbb{R}$ e $(W_n)_n$ i.i.d. di legge $N(0, \sigma^2)$.

1. Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, X_n è indipendente da W_{n+1}.
2. Dimostrare che $X_n \sim N(a^n x, \sigma^2(1 + a^2 + \ldots + a^{2n-2}))$.
3. Per quali $a \in \mathbb{R}$ il processo $(X_n)_n$ è una martingala rispetto alla sua filtrazione naturale?
4. Per quali $a \in \mathbb{R}$ la successione $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge in legge? A quale limite?

Esercizio 3. Tiriamo ripetutamente un dado equo a 6 facce, finchè non esce 1 oppure finchè non decidiamo di fermarci: il punteggio finale sarà dato dall'ultimo tiro effettuato. Supponiamo quindi di utilizzare la strategia S_r = "ci si ferma non appena il punteggio è $\geq r$". Detti X_n il punteggio dell'n-esima estrazione, $\tau_1 := \inf\{n \geq 1 \mid X_n = 1\}$ il primo istante in cui siamo costretti a fermarci perchè è uscito 1, e per ogni $r = 2, \ldots, 6$,

$$\tau_r := \inf\{n \geq 1 \mid X_n \geq r\}$$

il primo istante in cui possiamo fermarci secondo la strategia S_r, chiamiamo $X_{\tau_r \wedge \tau_1}$ il corrispondente punteggio finale.

1. Dimostrare che, per ogni $r \geq 2$, $X_{\tau_r \wedge \tau_1}$ è indipendente da $\tau_r \wedge \tau_1$.
2. Dimostrare che la legge di $X_{\tau_r \wedge \tau_1}$ è uguale alla legge di X_1 sotto la probabilità $\mathbb{P}(\cdot \mid \{X_1 \notin \{2, \ldots, r-1\})$.
3. Per ogni $r = 2, \ldots, 6$, calcolare $\mathbb{E}[X_{\tau_r \wedge \tau_1}]$.
4. Quale strategia conviene utilizzare per massimizzare il punteggio finale medio?

Esercizio 4. Sia Y_n il capitale di una compagnia di assicurazioni dopo n anni. Ogni anno $n \geq 1$, la compagnia riceve un totale (costante) di premi pari a P e paga un totale di sinistri pari a C_n, con $(C_n)_n$ i.i.d. di legge $N(\mu, \sigma^2)$: abbiamo quindi che il capitale all'inizio dell'anno $n+1$ è

$$Y_{n+1} = Y_n + P - C_{n+1}$$

dove $Y_0 > 0$ è costante. Definiamo poi $\tau := \inf\{n \mid Y_n \leq 0\}$ il **tempo di bancarotta** della compagnia.

1. Per quale $t \neq 0$ il processo $(e^{tY_n})_{n\geq 0}$ è una martingala rispetto alla sua filtrazione naturale?

2. Ponendo $Z_n := \min(e^{tY_n}, 1)$ con t che soddisfa il punto 1., dimostrare che $(Z_n)_{n\geq 0}$ è una supermartingala.

3. Supponendo che $P > \mu$, dimostrare che per ogni $m \geq 1$ si ha

   $$\mathbb{P}\{\tau \leq m\} \leq \exp\left(-\frac{2(P-\mu)}{\sigma^2} Y_0\right)$$

   Suggerimento: usare il teorema di arresto sulla supermartingala Z e sul tempo di arresto $\tau \wedge m$.

Soluzioni

Esercizio 1.

1. Per calcolare la legge congiunta di (T, U) basta scegliere un'opportuna base per $\mathcal{B}((0,1)^2)$: scegliamo allora la base

$$\mathcal{I} := \{(0,a) \times (b,1) \mid a, b \in (0,1)\}$$

con cui, tramite operazioni numerabili di unioni, intersezioni e complementi, si possono ottenere tutti i rettangoli aventi come lati intervalli (aperti o chiusi) di $(0,1)^2$, e quindi $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}((0,1)^2)$. Per ogni $(0,a) \times (b,1) \in \mathcal{I}$ abbiamo allora

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{(T,U) \in (0,a) \times (b,1)\} &= \mathbb{P}\{T < a, U > b\} = \\ &= \mathbb{P}\{X > Y, X < a, Y > bX\} + \mathbb{P}\{X \leq Y, Y < a, X > bY\} \\ &= \lambda_2(A) + \lambda_2(B) \end{aligned}$$

dove λ_2 è la misura di Lebesgue su $(0,1)^2$ e gli insiemi misurabili A e B sono definiti come

$$A := \{x, y \in (0,1) \mid bx < y < x, x < a\}, \qquad B := \{x, y \in (0,1) \mid x < y < x/b, y < a\},$$

e sono entrambi due rettangoli aventi base lunga $a(1-b)$ e altezza a: dunque $\lambda_2(A) = \lambda_2(B) = \frac{1}{2}a^2(1-b)$, e $\mathbb{P}\{T < a, U > b\} = a^2(1-b)$, che per quanto visto sopra caratterizza la legge di (T, U).

2. È facile vedere che per ogni $a \in [0,1]$ si ha

$$\mathbb{P}\{T < a\} = \mathbb{P}\{T < a, U > 0\} = a^2$$

e quindi anche $F_T(a) = a^2$, che è derivabile su $[0,1]$, quindi $f_T(a) = 2a$.

3. È facile vedere che per ogni $b \in [0,1]$ si ha

$$F_U(b) = \mathbb{P}\{U \leq b\} = 1 - \mathbb{P}\{U > b\} = 1 - \mathbb{P}\{T < 1, U > b\} = 1 - (1-b) = b$$

che è derivabile su $[0,1]$, quindi $f_U(b) = 1$, cioè U ha legge uniforme su $[0,1]$.

4. Dai punti precedenti si ricava che per ogni $a, b \in [0,1]$ si ha

$$\mathbb{P}\{T < a, U > b\} = a^2(1-b) = \mathbb{P}\{T < a\}\mathbb{P}\{U > b\}$$

Siccome $\mathcal{I}$ è una base per $\mathcal{B}([0,1]^2)$, questo basta per affermare che la legge congiunta di (T, U) è una legge prodotto, e quindi T e U sono indipendenti e di densità congiunta data da $f_{(T,U)}(a,b) = 2a$.

Esercizio 2.

1. Per induzione: X_0 è costante, quindi $\sigma(X_0) = \{\emptyset, \Omega\}$ ed X_0 è indipendente da W_1. Se $n \geq 1$ si ha che X_n dipende solo da $W_1, \ldots, W_n$, cioè $\sigma(X_n) \subseteq \sigma(W_1, \ldots, W_n)$, e questo implica che X_{n+1} dipende da X_n e W_{n+1}, quindi $\sigma(X_{n+1}) \subseteq \sigma(X_n, W_{n+1}) \subseteq \sigma(W_1, \ldots, W_{n+1})$: questo significa che, per ogni $n \geq 1$, X_n è indipendente da W_{n+1}.

2. Calcolando le funzioni caratteristiche delle X_n si ha che $\varphi_n := \varphi_{X_n}$ è definita in modo ricorsivo in questo modo: $\varphi_0(t) = e^{itx}$, e per ogni $n \geq 1$,

$$\varphi_{n+1}(t) = \varphi_{aX_n}(t)\varphi_{W_{n+1}}(t) = \varphi_n(at)e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

ed è facile verificare per induzione che $\varphi_n(t) = \exp(ia^n xt - \frac{1}{2}\sigma^2(1 + \ldots + a^{2n-2})t^2)$, che implica la tesi.

3. Abbiamo

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n^X] = \mathbb{E}[aX_n + W_{n+1}|\mathcal{F}_n^X] = aX_n + \mathbb{E}[W_{n+1}|\mathcal{F}_n^X] = aX_n + \mathbb{E}[W_{n+1}] = aX_n$$

poichè, per il punto 1), $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_1, \ldots, X_n) \subseteq \sigma(W_1, \ldots, W_n)$ è indipendente da W_{n+1}. Perciò $(X_n)_n$ è una martingala se e solo se $a = 1$.

4. Usando il teorema di Paul Levy, vediamo che se $|a| \geq 1$ allora $\varphi_n \to \mathbf{1}_{\{0\}}(t)$ puntualmente, che non è una funzione caratteristica poichè è discontinua, quindi in questo caso $(X_n)_n$ non converge in legge. Viceversa, se $|a| < 1$, si ha che per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_n(t) = \exp\left(ia^n xt - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{1-a^{2n}}{1-a^2}\right) \to \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\frac{1}{1-a^2}\right)$$

e quindi, se $|a| < 1$, si ha che $X_n \rightharpoonup N(0, \frac{\sigma^2}{1-a^2})$.

Esercizio 3.

1. Dato che sia $X_{\tau_r \wedge \tau_1}$ che $\tau_r \wedge \tau_1$ sono variabili aleatorie discrete, basta dimostrare che per ogni $n \geq 1$, $m = 1, \ldots, 6$, chiamando $A_r := \{1, r, \ldots, 6\}$, si ha

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{\tau_r \wedge \tau_1 = n, X_{\tau_r\wedge\tau_1} = m\} = \mathbb{P}\{\tau_r \wedge \tau_1 = n, X_n = m\} = \\
&= \mathbb{P}\{X_1 \notin A_r, \ldots, X_{n-1} \notin A_r, X_n \in A_r, X_n = m\} = \frac{|A_r^c|^{n-1}}{6^{n-1}} \cdot \frac{1}{6} = \\
&= \frac{|A_r|}{6}\left(\frac{r-2}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{|A_r|} = \frac{8-r}{6}\left(\frac{r-2}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{8-r}
\end{aligned}$$

se $m \in A$, ed è uguale a 0 altrimenti. In entrambi i casi, la probabilità sopra si fattorizza in $\mathbb{P}\{\tau_r \wedge \tau_1 = n\} = \frac{8-r}{6}\frac{(r-2)^{n-1}}{6^{n-1}}$, quindi $\tau_r \wedge \tau_1 \sim Ge(\frac{8-r}{6})$, e $\mathbb{P}\{X_{\tau_r\wedge\tau_1} = m\} = \frac{1}{8-r}\mathbf{1}_A(m)$, quindi $X_{\tau_r\wedge\tau_1}$ ha legge uniforme su A_r, e le due variabili aleatorie sono indipendenti.

2. La legge di X_1 sotto $\mathbb{P}(\cdot \mid \{X_1 \notin \{2, \ldots, r-1\}\}) = \mathbb{P}(\cdot \mid \{X_1 \in A_r\})$ è la legge uniforme su A_r, che è la stessa legge di $X_{\tau_r\wedge\tau_1}$.

3. Abbiamo quindi

$$\mathbb{E}[X_{\tau_r\wedge\tau_1}] = \sum_{i \in A_r} i\frac{1}{4-r} = \frac{1 + r + \ldots + 6}{8-r} = \frac{22 - r(r-1)/2}{8-r}$$

e quindi abbiamo

r	2	3	4	5	6
$\mathbb{E}[X_{\tau_r\wedge\tau_1}]$	$\frac{7}{2} = 3.5$	$\frac{19}{5} = 3.8$	4	4	$\frac{7}{2} = 3.5$

4. Le due strategie S_4 ed S_5 massimizzano entrambe il punteggio medio.

Esercizio 4.

1. Innanzitutto le $(Y_n)_n$ sono variabili aleatorie gaussiane, quindi $(e^{tY_n})_n \subseteq L^!$. Inoltre C_{n+1} è indipendente da $\mathcal{F}_n$ per ogni $n \geq 0$. Abbiamo poi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{tY_{n+1}}|\mathcal{F}_n^Y] &= \mathbb{E}[e^{t(Y_n+P-C_{n+1})}|\mathcal{F}_n^Y] = e^{t(Y_n+P)}\mathbb{E}[e^{-tC_{n+1}}|\mathcal{F}_n^Y] = \\ &= e^{t(Y_n+P)}\mathbb{E}[e^{-t(C_{n+1}-\mu)}] = e^{tY_n}e^{t(P-\mu)+\frac{1}{2}t^2\sigma^2}\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che, se $X \sim N(0,\sigma^2)$, allora $\mathbb{E}[e^X] = e^{\frac{1}{2}\sigma^2}$. Allora $(e^{tY_n})_n$ è una martingala rispetto alla sua filtrazione naturale se e solo se

$$t(P-\mu) + \frac{1}{2}t^2\sigma^2 = 0$$

Questa equazione ha le due soluzioni $t = 0$ e $t = -\frac{2(P-\mu)}{\sigma^2}$.

2. La tesi è equivalente a mostrare che $-Z$ è una submartingala. Poichè la funzione $\varphi(x) = -\min(x,1)$ è convessa e $(e^{tY_n})_n$ è una martingala, abbiamo che $-Z_n = \varphi(e^{tY_n})$ definisce una submartingala per la disuguaglianza di Jensen, e quindi Z è una supermartingala.

3. Abbiamo quindi che per ogni $\tilde{\tau}$ tempo di arresto limitato dal teorema di arresto segue

$$\mathbb{E}[Z_{\tilde{\tau}}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z_{\tilde{\tau}}|\mathcal{F}_0^Y] \leq \mathbb{E}[Z_0] = \exp\left(-\frac{2(P-\mu)}{\sigma^2}Y_0\right)$$

Se ora scegliamo $\tilde{\tau} = \tau \wedge m$ per $m \geq 1$, allora $\tau \wedge m$ è un tempo di arresto limitato e, poichè $t < 0$, abbiamo $e^{tY_\tau} \geq 1$ e quindi $Z_\tau = 1$, e da questo segue

$$Z_{\tau\wedge m} = \mathbf{1}_{\{\tau>m\}}Z_m + \mathbf{1}_{\{\tau\leq m\}}Z_\tau = \mathbf{1}_{\{\tau>m\}}Z_m + \mathbf{1}_{\{\tau\leq m\}} \geq \mathbf{1}_{\{\tau\leq m\}}$$

e infine

$$\mathbb{P}\{\tau \leq m\} = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau\leq m\}}] \leq \mathbb{E}[Z_{\tau\wedge m}] \leq \exp\left(-\frac{2(P-\mu)}{\sigma^2}Y_0\right)$$

Esame di Calcolo delle Probabilità del 15 dicembre 2010
(Corso di Laurea Triennale in Matematica, Universitá degli Studi di Padova)
(docente: Tiziano Vargiolu)

Hanno superato la prova:

Ballan Sara	$15 + 3^-$
Cannizzaro Giuseppe	$20 + 3^+$
Castelli Francesco	21
Dal Sasso Veronica	19
Di Piazza Giulio	$20.5 + 3^+$
Facca Enrico	$17.5 + 3^-$
Grando Laura	$18.5 + 3^-$
Mezzalira Luca	18
Mozzato Alessandro	$15.5 + 3^+$
Secci Massimo	$18.5 + 3^+$
Zarattini Carlo	$15.5 + 3^-$
???	22.5

Visione compiti corretti, registrazione voto e/o orali: venerdì 17 dicembre ore 14.30 aula 2AB/40, oppure nel mio studio.