Esercizi di Calcolo delle Probabilità della 1^a settimana (Corso di Laurea in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Esercizio 1. Se $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ è uno spazio probabilizzato e chiamiamo

$$\mathcal{N} \ := \ \{N \in \mathcal{A} \mid \mathbb{P}(N) = 0\}, \qquad \bar{\mathcal{A}} := \{E \cup F \mid E \in \mathcal{A}, F \subseteq N \text{ per qualche } N \in \mathcal{N}\}$$

Dimostrare che $\bar{\mathcal{A}}$ è una σ-algebra.

Esercizio 2. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato, $H \in \mathcal{A}$ non trascurabile e $\mathbb{P}_H$ la probabilità condizionata ad H. Dimostrare che, se $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, allora si ha anche $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_H)$ e

$$E_{\mathbb{P}_H}[X] = \int_\Omega X \ d\mathbb{P}_H = E_{\mathbb{P}}\left[X \frac{\mathbf{1}_B}{\mathbb{P}(B)}\right] = \frac{E_{\mathbb{P}}[X \mathbf{1}_B]}{\mathbb{P}(B)}$$

Suggerimento: considerare in successione i casi:

1. $X \in L^+(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ed è una v.al. semplice;
2. $X \in L^+(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$;
3. $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Esercizio 3. Sia $(X_n)_{n \geq 1}$ una successione di variabili aleatorie, e $(\mathcal{F}_n)_n$ una famiglia di σ-algebre su Ω tali che X_n è $\mathcal{F}_n$-misurabile e che $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$ per ogni $n \geq 1$. Definiamo poi

$$S_n := \prod_{i=1}^n X_i \quad \forall n \geq 1$$

1. Dimostrare che S_n è una variabile aleatoria $\mathcal{F}_n$-misurabile per ogni $n \in \mathbb{N}^*$;
2. Sia $\tau := \inf\{n \mid S_n \geq a\}$ per un $a > 0$ fissato. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, l'evento $\{\tau \geq n\} \in \mathcal{F}_{n-1}$.

Esercizio 4. In una popolazione di batteri, supponiamo che nel passaggio da una generazione all'altra ogni individuo i della generazione $n \geq 1$ generi un numero (naturale!) aleatorio $Y_i^{(n)}$ di altri individui e muoia; supponiamo che le $(Y_i^{(n)})_{i,n \geq 1}$ siano i.i.d. di media μ e varianza σ^2. Il numero di batteri alla n-esima generazione sarà quindi

$$S_{n+1} = \sum_{i=1}^{S_n} Y_i^{(n)}$$

Supponiamo che $S_1 = 1$, e definiamo $X_n = S_n / \mu^n$. Dimostrare che:

1. S_n è $\sigma(Y_i^{(1)}, \ldots, Y_i^{(n-1)} | i \geq 1)$-misurabile per ogni $n > 1$.
2. $\sigma(X_1, \ldots, X_n) = \sigma(S_1, \ldots, S_n) \subseteq \sigma(Y_i^{(1)}, \ldots, Y_i^{(n-1)} | i \geq 1)$ per ogni $n \geq 1$;

Esercizio 5. Supponiamo di avere lo stesso modello di popolazione dell'esercizio precedente. Dando per noto che per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, S_n è indipendente da $(Y_i^{(n)})_i$:

a) dimostrare che $\mathbb{E}[S_{n+1} \mid S_n] = \mu S_n$;

b) calcolare $\mathbb{E}[S_{n+1}^2]$ in funzione di momenti di S_n (suggerimento: condizionare rispetto a S_n).

Esercizio 6. Sia $(X_n)_n$ una successione di variabili aleatorie tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si abbia $X_n \in L^2$ e $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$, dove $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$. Dimostrare che per ogni $i < j < k$ si ha:

a) $\mathbb{E}[(X_k - X_j)X_i] = 0$,

b) $\mathbb{E}[(X_k - X_j)^2|\mathcal{F}_i] = \mathbb{E}[X_k^2|\mathcal{F}_i] - \mathbb{E}[X_j^2|\mathcal{F}_i]$.

Soluzioni su `http://www.math.unipd.it/~vargiolu/CalPro/`