Esercizi di Calcolo delle Probabilità della 9^a settimana (Corso di Laurea in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Esercizio 1. Una obbligazione può avere *rating* A, B, C o D e passare da un rating all'altro secondo la matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.09 & 0.009 & 0.001 \\ 0.05 & 0.9 & 0.04 & 0.01 \\ 0.01 & 0.04 & 0.9 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Qual è la probabilità che una obbligazione con *rating* B sia insolvente (cioè nello stato D) dopo 2 anni?
2. Se sul mercato il 40% delle obbligazioni hanno *rating* A, il 30% hanno *rating* B e il 30% hanno *rating* C, quante obbligazioni saranno fallite dopo 2 anni?

Esercizio 2. Sia $(X_n)_n$ un processo di Bernoulli di parametro p, $(\mathcal{F}_n)_n$ la sua filtrazione naturale, e definiamo per ogni $N \geq 1$ le due variabili aleatorie

$$S_N := \sum_{n=1}^{N} X_n, \qquad \tau_N := \min\{n \mid S_n = N\}$$

Fissato $N \geq 1$, dimostrare che

1. per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\{\tau_N \leq n\} = \{S_n \geq N\}$, e quindi τ_N è un tempo di arresto rispetto a $(\mathcal{F}_n)_n$;
2. $(S_n)_n$ è una catena di Markov; specificarne legge iniziale e nucleo di transizione;
3. $S^{|\tau}$ è una catena di Markov; specificarne legge iniziale e nucleo di transizione;
4. Classificare gli stati della catena S e della catena $S^{|\tau}$.

Esercizio 3. Una persona va a correre ogni mattina. Sia quando esce di casa che quando vi rientra dopo la corsa, lo fa con uguale probabilità dalla porta di fronte o da quella sul retro. Il corridore possiede 5 paia di scarpe da jogging e le lascia fuori dalla porta dalla quale rientra dalla corsa. Se quando esce da una porta non trova alcun paio di scarpe, allora va a correre scalzo. Possiamo quindi modellizzare lo "stato del sistema" mediante il numero di paia di scarpe fuori dagli ingressi, ponendo

$$E := \{5|0(s), 5|0, 4|0, 4|1, 3|1, 3|2, 2|2, 2|3, 1|3, 1|4, 0|4, 0|5, 0|5(s)\}$$

Gli stati segnati con (s) corrispondono a quelli in cui il corridore corre scalzo. Per comodità assegnamo un'etichetta ordinale agli elementi di E come sono sopra a partire da 0 (cosicchè $\{0\} = \{5|0(s)\}$, $\{1\} = \{5|0\}$ ecc.) Tutti gli stati pari così corrispondono al fatto che la persona sta correndo, mentre negli stati dispari la persona è in casa.

1. Definire un'opportuna catena di Markov $(X_n)_n$ che modellizzi il fenomeno, specificando la matrice di transizione P.

2. Classificare gli stati della catena di Markov X.

3. Consideriamo $F = \{5|0(s), 4|0, 3|1, 2|2, 1|3, 0|4, 0|5(s)\}$ o $F = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ (a seconda della convenzione seguita), che sono gli stati in cui la persona è fuori a correre. Dimostrare che se $X_0 \in F$ allora $Y = (Y_n)_n = (X_{2n})_n$ è una catena di Markov a valori in F e di matrice di transizione $P^2|_F$.

4. Classificare gli stati della catena di Markov Y.

5. Dando per noto che Y è regolare, determinare la probabilità a lungo termine che la persona corra scalza.

Esercizio 4. Un modello biologico (*Nature Letters* 2006) prevede che il numero di cellule adiacenti ad una cellula "tipica" all'interno di un foglio epiteliale di un tessuto, ad ogni mitosi, segua una catena di Markov con matrice di transizione data da

$$p_{ij} = \mathbb{P}\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = \binom{i-4}{j-5} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-4}, \qquad 5 \leq j \leq i+1$$

In particolare, lo spazio degli stati è costituito da $E := \{4, 5, 6, \ldots\}$ (i.e. ogni cellula confina almeno con 4 cellule).

1. Classificare gli stati di E.

2. Dimostrare che la legge di X_{n+1} condizionata a X_n è data da $\delta_5 * B(X_n - 4; \frac{1}{2})$, dove δ_5 è la delta di Dirac centrata nello stato $\{5\}$.

3. Dimostrare che $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid X_n] = \frac{1}{2}X_n + 3$.

4. Dimostrare che $\mathbb{E}[X_n] = 6 + \frac{1}{2^n}(\mathbb{E}[X_0] - 6)$.

Esercizio 5. Su un ponte, ogni cinque camion quattro sono seguiti da un'automobile, mentre una automobile su sei è seguita da un camion.

1. Modellizzare il fenomeno con una catena di Markov $(X_n)_n$ a valori nell'insieme $\{A, C\}$, specificandone la matrice di transizione.

2. Supponiamo che sia appena passato un'auto, e definiamo

$$\tau := \inf\{n | X_n = A\}$$

come il tempo da attendere perchè passi la prossima auto. Calcolare $\mathbb{P}\{\tau = n \mid X_0 = A\}$ per ogni $n \geq 1$. Che legge ha?

3. Che proporzioni ci attendiamo, per n grande, per le auto e i camion?

Soluzioni su `http://www.math.unipd.it/~vargiolu/CalPro/`