Esercizi di Calcolo delle Probabilità della 2^a settimana (Corso di Laurea in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Esercizio 1. Sia $X \sim Exp(\lambda)$ e definiamo $X_n = k/2^n$ se $k/2^n \leq X < (k+1)/2^n$ per ogni $k, n \in \mathbb{N}$.

i) Calcolare la legge di Y_n, con $Y_n := 2^n X_n$;

ii) Dimostrare che $X_n \to X$ q.c.

Ricordiamo che $X \sim Exp(\lambda)$ se la legge di X ha densità $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)$ rispetto alla misura di Lebesgue.

Esercizio 2. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato e definiamo un'altra probabilità $\mathbb{Q} := X \cdot \mathbb{P}$, cioè $\mathbb{Q}$ è la probabilità che ha densità X rispetto a $\mathbb{P}$, dove ovviamente $X \in L^+(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ e $\mathbb{E}[X] = 1$. Dimostrare che:

1. Se definiamo $\mathbb{Q}' := Y \cdot \mathbb{Q}$, con $Y \in L^+(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{Q})$ e $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y] = 1$ (dove $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ è la speranza calcolata rispetto alla probabilità $\mathbb{Q}$), allora $\mathbb{Q}'$ ha densità XY rispetto a $\mathbb{P}$, e anche $XY \in L^+(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ e $\mathbb{E}[XY] = 1$.

2. Se $X > 0$ $\mathbb{P}$-q.c., allora si ha anche che $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\frac{1}{X}] = 1$ e $\mathbb{P} = \frac{1}{X} \cdot \mathbb{Q}$.

Nota: questo esercizio giustifica le scritture formali

$$\frac{d\mathbb{Q}'}{d\mathbb{P}} = \frac{d\mathbb{Q}'}{d\mathbb{Q}} \cdot \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \qquad \text{e} \quad \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} = \frac{1}{X}$$

Esercizio 3. Sia X una variabile aleatoria reale di legge μ e tale che $\mathbb{E}[X^2] \in (0, +\infty)$, e Y una variabile aleatoria reale di legge ν tale che

$$\frac{d\nu}{d\mu}(x) = Cx^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

1. Dimostrare che se vogliamo che ν sia una legge di probabilità, allora bisogna avere $C = 1/\mathbb{E}[X^2]$.

2. Dimostrare che per $p \geq 1$, si ha che $Y \in L^p$ se e solo se $X \in L^{p+2}$.

3. Dimostrare che, per ogni $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ positiva, si ha

$$\mathbb{E}[g(Y)] = C\mathbb{E}[X^2 g(X)]$$

Esercizio 4. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato, $X \sim N(0,1)$ sotto $\mathbb{P}$ e definiamo $Y := X - a$, con $a \in \mathbb{R}$.

1. Dire che legge ha Y sotto $\mathbb{P}$;
2. Dimostrare che per ogni g positiva (limitata), si ha

   $$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[g(Y)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[g(X)\exp\left(-aX - \frac{1}{2}a^2\right)\right]$$

   (il simbolo $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$ denota la speranza fatta rispetto alla probabilità $\mathbb{P}$).

Definiamo poi $Z := \exp(aX - \frac{1}{2}a^2)$, e la nuova probabilità $\mathbb{Q}$ su $(\Omega, \mathcal{A})$ come

$$\mathbb{Q}(B) := \int_B Z \, d\mathbb{P} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_B Z]$$

e denotiamo $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ la speranza rispetto alla probabilità $\mathbb{Q}$.

3. Dimostrare che $Y \sim N(0,1)$ sotto $\mathbb{Q}$.

Esercizio 5.

1. Dimostrare che, se $F = F_1 + F_2$ con F_1, F_2 crescenti e continue a destra, allora $\mu_F = \mu_{F_1} + \mu_{F_2}$.
2. Sia

   $$F(t) := \begin{cases} \frac{1}{4}e^t & \text{per } t < 0, \\ 1 - \frac{1}{4}e^{-t} & \text{per } t \geq 0. \end{cases}$$

   Descrivere μ_F in termini di misure note.

Soluzioni su `http://www.math.unipd.it/~vargiolu/CalPro/`