Esercizi di Calcolo delle Probabilità della 3^a settimana (Corso di Laurea in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Esercizio 1.

1. Sia (X, Y) un vettore aleatorio bidimensionale con densità uniforme $f_{(X,Y)} := \frac{1}{\lambda_2(G)} \mathbf{1}_G$ sul cerchio $G = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, e (Z, W) un altro vettore aleatorio con densità uniforme $f_{(Z,W)} := \frac{1}{\lambda_2(R)} \mathbf{1}_R$ sul rettangolo $R = [0, 1] \times [-1, 1]$. Motivando la risposta, dire se X e Y sono indipendenti. Stessa domanda per Z e W.

2. Si consideri un punto "scelto a caso" nel cerchio unitario in modo che il raggio R abbia legge uniforme su $(0, 1)$, così come l'angolo θ formato con l'asse delle ascisse su $(0, 2\pi)$. Si consideri poi il vettore aleatorio $(X, Y) := (R \cos \theta, R \sin \theta)$. Si può dire che (X, Y) abbia legge uniforme sul cerchio unitario? Qual è la sua densità congiunta?

Esercizio 2.

1. Si scelga a caso un punto X dell'intervallo $[0, 2]$, con distribuzione uniforme di densità

$$f_X(x) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[0,2]}(x)$$

(in altre parole, X è una variabile aleatoria con densità f_X). Qual è la probabilità che il triangolo equilatero il cui lato ha lunghezza X abbia area maggiore di 1?

2. Sia (X, Y) un vettore aleatorio assolutamente continuo con densità congiunta

$$f_{X,Y}(x, y) = 2 \cdot \mathbf{1}_T(x, y),$$

dove T è il triangolo di vertici $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$. Determinare le densità marginali di X e Y.

Esercizio 3. Siano $X, Y \sim U(0, 1)$ indipendenti, e

$$\begin{cases} Z &= \sqrt{-2 \log X} \cos(2\pi Y) \\ W &= \sqrt{-2 \log X} \sin(2\pi Y). \end{cases}$$

Determinare la distribuzione del vettore (Z, W). Z e W sono indipendenti?

Esercizio 4. Sia $(X_n)_{n \geq 1}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. tali che

$$\mathbb{P}\{X_n = u\} = p, \quad \mathbb{P}\{X_n = d\} = 1 - p \quad \forall n \geq 1$$

con $p \in (0, 1)$ e u, d tali che $0 < d < 1 < u$. Definiamo $\mathcal{F}_n = \sigma(X_m | m \leq n)$ e

$$S_n := S_0 \prod_{i=1}^{n} X_i \quad \forall n \geq 1$$

con S_0 costante reale positiva. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}^*$:

1. S_n è una variabile aleatoria $\mathcal{F}_n$-misurabile;

2. S_n e X_{n+1} sono indipendenti;

3. $\mathcal{F}_n = \sigma(S_m | m \leq n)$.

Definiamo poi $\tau := \inf\{n \mid X_n = u\}$.

4. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, l'evento $\{\tau \geq n\}$ è indipendente da X_n.

5. Che legge ha τ?

Esercizio 5. Su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ siano assegnati un processo di Bernoulli $(X_i)_i$ di parametro $p \in (0, 1)$ e una variabile aleatoria $N \sim Po(\lambda)$, $\lambda > 0$, che siano indipendenti. Si ponga

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$$

(per convenzione ricordiamo che $S_0 \equiv 0$) e si denoti con S_N la variabile aleatoria che, per ciascun intero $n \in \mathbb{N}$, coincide con S_n sull'evento $\{N = n\}$; in altre parole, S_N è definita come funzione su Ω come $(S_N)(\omega) := (S_{N(\omega)})(\omega)$.

1. Calcolare la legge di S_N;

2. Calcolare la legge di $N - S_N$;

3. Dimostrare che S_N e $N - S_N$ sono indipendenti.

Esercizio 6. Consideriamo una variabile aleatoria $X \in L^+(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ di legge μ, e poniamo

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq x\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x\}.$$

Calcolando in due modi diversi la misura di questi due eventi rispetto alla misura prodotto $\mu \otimes \lambda_1$, dove λ_1 è la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$, dimostrare le seguenti formule:

1. $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbb{P}\{X \geq t\}\, dt$,

2. $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbb{P}\{X > t\}\, dt$.

3. Se X è a valori in $\mathbb{N}$, dimostrare che $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{X > n\}$.

Soluzioni su `http://www.math.unipd.it/~vargiolu/CalPro/`