Esercizi di Calcolo delle Probabilità della 4^a settimana (Corso di Laurea in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Esercizio 1. Trovare la legge condizionale di Y rispetto a X quando il vettore (X, Y) ha densità congiunta data da:

1. $f(x, y) = \lambda^2 e^{-\lambda y}$, $0 \leq x \leq y < +\infty$
2. $f(x, y) = x e^{-x(y+1)}$, $x, y \geq 0$.

Esercizio 2. Sia X una variabile aleatoria reale di legge μ, e Y una variabile aleatoria reale di legge condizionale $(\nu_x)_{x \in D}$ rispetto a X, su un opportuno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Supponiamo inoltre che μ ammetta una densità f ed ogni ν_x ammetta una densità g_x per ogni $x \in D$ (le densità si intendono tutte rispetto alla misura di Lebesgue).

1. Detta G la funzione di ripartizione di Y "non condizionale", dimostrare che
$$G(u) = \int_D \nu_x((-\infty, u]) f(x)\ dx$$
2. Dimostrare che
$$g(u) := \int_D g_x(u)\ f(x)\ dx$$
è la densità di Y "non condizionale".
3. Supponiamo ora che (X, Y) sia un vettore aleatorio con densità congiunta $h(x, y)$ rispetto alla misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^2$. Calcolare le densità marginali f_X, f_Y, la densità condizionale $f_{Y|X}$ e verificare che la formula del punto 2. è vera anche in questo caso.

Esercizio 3. Siano X, Y variabili aleatorie indipendenti, rispettivamente di legge $Po(\lambda)$ e $Po(\mu)$, con $\lambda, \mu > 0$. Calcolare la legge condizionale di X rispetto a $X + Y$.

Esercizio 4. Siano $(X_n)_n$ indipendenti e tali che $X_n \sim Exp(n + 1)$, e N indipendente dalle $(X_n)_n$ e di legge $Po(\mu)$, con $\mu > 0$. Trovare la funzione di ripartizione e la densità della variabile aleatoria X_N.
Suggerimento: considerare la legge condizionale di X_N rispetto a N.

Esercizio 5. Siano N, $(X_i)_{i \geq 1}$ variabili aleatorie indipendenti con $N \sim Ge(p)$ e $X_i \sim Exp(\lambda)$ per ogni $i \geq 1$, con $p \in (0, 1)$, $\lambda > 0$. Definiamo poi
$$Y := \min(X_1, \dots, X_N)$$

1. Si calcoli la legge condizionale di Y rispetto a N.
2. Si calcoli la funzione di ripartizione di Y.
3. Si calcoli $\mathbb{E}[Y]$.

Suggerimento: ricordarsi che, se $Y \in L^+$, allora $\mathbb{E}[Y] = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbb{P}\{Y > t\}\ dt$.

Soluzioni su `http://www.math.unipd.it/~vargiolu/CalPro/`