Esercizi di Calcolo delle Probabilità della 5^a settimana (Corso di Laurea in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Esercizio 1. Siano $(X_n)_n$ i.i.d. di Bernoulli di parametro p e definiamo per ogni $N \geq 1$ le due variabili aleatorie

$$S_N := \sum_{n=1}^{N} X_n, \qquad \tau_N := \min\{n \mid S_n = N\}$$

Fissato $N \geq 1$, dimostrare che

1. per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\{\tau_N \leq n\} = \{S_n \geq N\}$
2. Dando per noto che τ_N è quasi certamente finito, calcolare $E[\tau_N]$ (suggerimento: usare l'identità di Wald).
3. Calcolare la legge di τ_1.

Esercizio 2. Una compagnia di vendite telefoniche tenta ripetutamente di vendere cucine ad ognuna delle N famiglie di un villaggio, dove $N \sim Po(\lambda)$. La famiglia i accetta di comprare una nuova cucina dopo che è stata sollecitata K_i volte, dove le $(K_i)_{i=1,\dots,N}$ sono i.i.d., indipendenti da N e di densità discreta $f(n) = \mathbb{P}\{K_i = n\}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo $X_n := \sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{K_i=n}$ il numero di cucine vendute all'n-esimo giro di sollecitazioni.

1. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ la variabile aleatoria X_n è di Poisson di parametro $\lambda f(n)$.
2. La compagnia abbandona al T-esimo giro di sollecitazioni, dove $T := \inf\{n | X_n = 0\}$. Sia $S_T := X_1 + \ldots + X_T$ il numero di cucine vendute fino a T. Supponendo di aver dimostrato che le $X_n, n \geq 1$ sono indipendenti, dimostrare che $\mathbb{E}[S_T] = \lambda \mathbb{E}[F(T)]$, dove $F(k) := f(1) + \ldots + f(k)$ è la funzione di ripartizione delle $(K_i)_{i=1,\dots,N}$.

Esercizio 3. Consideriamo una successione di variabili aleatorie $(X_n)_n$ a valori in $[-1, 1]$ e tale che:

- $X_0 = 0$ q.c.
- per ogni $n \in \mathbb{N}$, la legge condizionale di X_{n+1} rispetto a $X_0, \ldots, X_n$ è la legge uniforme sul più grande intervallo di centro X_n contenuto in $[-1, 1]$; in altre parole, una versione della legge condizionale di X_{n+1} rispetto a $\mathcal{F}_n^X$ (o equivalentemente rispetto a X_n) è la famiglia $(U(x - a(x), x + a(x)))_{x \in (-1,1)}$, dove $a(x) := 1 - |x|$.

Dimostrare che:

a) $E[X_{n+1} | (X_0, \ldots, X_n)] = X_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

b) Dando per noto che $X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} X_\infty$ tale che $|X_\infty| \leq 1$, dedurne che $\mathbb{E}[X_\infty] = 0$.

c) $\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2] = \mathbb{E}[\frac{(1-|X_n|)^2}{3}]$ (suggerimento: condizionare rispetto a X_n).

d) Usando il punto precedente e facendo il limite per $n \to \infty$, dedurne che $|X_\infty| = 1$ q.c.

e) Usando i punti *d*) e *b*), dedurne la legge di X_∞.

Esercizio 4. Dando per noto che per ogni $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\frac{d}{dx} e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x}$ e che $\int e^{\alpha x}\, dx = e^{\alpha x}/\alpha + c$, calcolare la funzione caratteristica φ_X, dove X è una variabile aleatoria:

1. di Poisson: $X \sim Po(\lambda)$, con $\lambda > 0$;
2. uniforme: $X \sim U(a,b)$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$;
3. esponenziale: $X \sim Exp(\lambda)$, con $\lambda > 0$;
4. Gamma: $X \sim \Gamma(a, \lambda)$, con $a \in \mathbb{Q}^+$, $\lambda > 0$;

(suggerimento per il punto 4): per ogni $m/n \in \mathbb{Q}^+$, considerare prima una legge $\Gamma(m, \lambda)$ come somma di m leggi $Exp(\lambda)$ indipendenti, e poi la stessa legge $\Gamma(m, \lambda)$ come somma di n leggi $\Gamma(m/n, \lambda)$ indipendenti, che sono distribuite come X)

Esercizio 5. Una legge reale X si dice *infinitamente divisibile* se, per ogni intero positivo n, esistono variabili aleatorie $(Y_i^{(n)})_{i=1,\dots,n}$ i.i.d. e tali che $\sum_{i=1}^n Y_i^{(n)}$ ha la stessa distribuzione di X. Mostrare che le seguenti distribuzioni sono infinitamente divisibili:

a) normale;

b) Poisson;

c) Gamma;

(suggerimento: usare le funzioni caratteristiche)

Esercizio 6. Se $X \sim N(0,1)$, calcolare $\mathbb{E}[X^n]$ per ogni $n \geq 1$.
(suggerimento: prendere per noto che se $\mathbb{E}[|X|^n] < +\infty$, allora $\varphi_X \in C^n$ e $\varphi_X^{(n)}(t) = \mathbb{E}[(iX)^n e^{itX}]$).

Soluzioni su `http://www.math.unipd.it/~vargiolu/CalPro/`