Esercizi di Calcolo delle Probabilità della 6^a settimana (Corso di Laurea in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Esercizio 1. Siano $X, (X_n)_n, Y, (Y_n)_n$ variabili aleatorie reali e $a, b \in \mathbb{R}$. Dimostrare che:

1. se $X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} X$ e $Y_n \xrightarrow{\text{q.c.}} Y$, allora $aX_n + bY_n \xrightarrow{\text{q.c.}} aX + bY$
2. se $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ e $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$, allora $aX_n + bY_n \xrightarrow{\mathbb{P}} aX + bY$
3. se $X_n \xrightarrow{L^p} X$ e $Y_n \xrightarrow{L^p} Y$ per $p \geq 1$, allora $aX_n + bY_n \xrightarrow{L^p} aX + bY$
4. se $X_n \rightharpoonup X$ e $Y_n \rightharpoonup Y$ e per ogni $n \geq 1$ le variabili aleatorie X_n e Y_n sono indipendenti, allora $aX_n + bY_n \rightharpoonup aX + bY$

Esercizio 2. Siano $(X_n)_n$ una successione di variabili aleatorie reali e $g \in C(\mathbb{R})$.

1. Se $X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} X$, allora $g(X_n) \xrightarrow{\text{q.c.}} g(X)$.
2. Se g è uniformemente continua su $\mathbb{R}$ e $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, allora $g(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(X)$.

Esercizio 3. Siano $(X_n)_{n\geq 2}$ variabili aleatorie indipendenti tali che

$$\mathbb{P}\{X_n = n\} = \mathbb{P}\{X_n = -n\} = \frac{1}{2n \log n}, \quad \mathbb{P}\{X_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n \log n}$$

a) Mostrare che $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

b) Determinare per quali $p \geq 1$ si ha $X_n \xrightarrow{L^p} 0$.

Esercizio 4. Sia $(X_n)_n$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. $\sim Be(\frac{1}{2})$ e definiamo

$$Y_n := \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} X_k$$

1. Dimostrare che $Y_n \xrightarrow{\text{q.c.}} Y := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} X_k$.
2. Dimostrare che
$$\varphi_{Y_n}(t) = \frac{1}{2^n} \frac{e^{it} - 1}{e^{it/2^n} - 1}$$
3. Dedurne che $Y_n \rightharpoonup U(0;1)$, e che quindi $Y \sim U(0;1)$.

Esercizio 5. Siano $(X_n)_n$ i.i.d. di legge $U(0,1)$, e poniamo $M_n := \max(X_1, \ldots, X_n)$. Dimostrare che $n(1 - M_n) \rightharpoonup Exp(1)$.
(suggerimento: usare una caratterizzazione della convergenza in legge)

Esercizio 6. Siano $(X_n)_n$ i.i.d. aventi densità rispetto alla misura di Lebesgue $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ (le X_n si dicono allora avere **legge di Cauchy**), e definiamo

$$M_n := \frac{\pi}{n} \max(X_1, \ldots, X_n)$$

1. Qual è la funzione di ripartizione di X_n?
2. Calcolare la funzione di ripartizione di M_n.
3. Dimostrare che $(M_n)_n$ converge in legge verso una distribuzione avente funzione di ripartizione $H(x) = e^{-1/x}\mathbf{1}_{\{x>0\}}$.

Suggerimento: ricordarsi che $\operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ per ogni $x > 0$.

Soluzioni su `http://www.math.unipd.it/~vargiolu/CalPro/`