Esercizi di Calcolo delle Probabilità della 7^a settimana (Corso di Laurea in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Esercizio 1. Sia $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processo stocastico definito da $X_0 := x \in \mathbb{R}$ e, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} := aX_n + W_{n+1}$$

con $a \in \mathbb{R}$ e $(W_n)_n$ i.i.d. di legge $N(0, \sigma^2)$.

1. Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, X_n è indipendente da W_{n+1}.
2. Dimostrare che $X_n \sim N(a^n x, \sigma^2(1 + a^2 + \ldots + a^{2n-2})$.
3. Per quali $a \in \mathbb{R}$ il processo $(X_n)_n$ è una martingala rispetto alla sua filtrazione naturale?
4. Per quali $a \in \mathbb{R}$ la successione $(X_n)_n$ converge in legge? A quale limite?

Esercizio 2. Siano $(X_n)_n$ variabili aleatorie tali che Var $[X_n] < c$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per qualche $c \in \mathbb{R}^+$. Mostrare che $(X_n)_n$ soddisfa la legge debole dei grandi numeri se il **coefficiente di correlazione**, definito da

$$\rho(X_i, X_j) := \frac{\text{Cov }(X_i, X_j)}{\sqrt{\text{Var }[X_i]\text{Var }[X_j]}}$$

soddisfa una delle due relazioni

1. $\rho(X_i, X_j) \le 0$ per ogni $i \neq j$;
2. $\rho(X_i, X_j) \to 0$ per $|i - j| \to \infty$

(suggerimento: ricordarsi come si dimostra la legge debole per variabili aleatorie scorrelate).

Esercizio 3. L'intervallo $[0, 1]$ è partizionato in n sottointervalli disgiunti $(I_i)_{i=1,\ldots,n}$, ciascuno di lunghezza p_i. Definiamo **entropia** di questa partizione la quantità

$$h := -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$$

Siano poi $(X_n)_n$ i.i.d. di legge $U(0, 1)$, e definiamo $Z_m(i)$ come il numero delle $X_1, \ldots, X_m$ che cadono nell'intervallo i-esimo della partizione. Definiamo infine

$$R_m := \prod_{i=1}^{n} p_i^{Z_m(i)}$$

1. Dare una definizione matematica delle $Z_m(i)$, $i = 1, \ldots, n$, $m \ge 1$.
2. Dimostrare che $\frac{\log R_m}{m} \to -h$ quasi certamente per $m \to \infty$.

Esercizio 4. Siano $U^n = (U_1, \ldots, U_n)$, $V^n = (V_1, \ldots, V_n)$ le coordinate di due punti scelti all'interno del cubo unitario n-dimensionale in modo indipendente e con legge uniforme, e sia X_n la distanza euclidea tra questi due punti.

1. Dimostrare che $\mathbb{E}[(U_i - V_i)^2] = \frac{1}{6}$ per ogni $i = 1, \ldots, n$.
2. Dimostrare che $X_n/\sqrt{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{\sqrt{6}}$ per $n \to \infty$.
3. Dimostrare che $\mathbb{E}[X_n]/\sqrt{n} \to \frac{1}{\sqrt{6}}$ per $n \to \infty$.

Esercizio 5. Il tempo di funzionamento (in giorni) di un componente prima di guastarsi è una variabile aleatoria di densità $f(x) := 2x\mathbf{1}_{(0,1)}(x)$ rispetto alla misura di Lebesgue. Supponiamo che appena questi componenti si guastano vengano rimpiazzati, e denotiamo con X_i il tempo di vita dell'i-esimo componente, e con $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ il momento dell'n-esimo guasto.

1. Calcolare $\mathbb{E}[X_i]$.
2. Supponendo che le $(X_i)_i$ siano indipendenti, calcolare il tasso di guasto a lungo termine
$$r := \lim_{n\to\infty} \frac{n}{S_n}$$
3. Quanti componenti sono necessari perchè la scorta, con probabilità pari al 90%, sia sufficiente per almeno 35 giorni?

Soluzioni su `http://www.math.unipd.it/~vargiolu/CalPro/`