Esercizi di Calcolo delle Probabilità della 8^a settimana (Corso di Laurea in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Esercizio 1. Un vettore aleatorio X a valori in $\mathbb{R}^d$ si dice **gaussiano** se, per ogni $y \in \mathbb{R}^d$, si ha che $\langle y, X\rangle$ è una variabile aleatoria gaussiana.

1. Dimostrare che ogni componente X_i, $i = 1, \dots, d$, è una variabile aleatoria reale di legge $N(m_i, \sigma_{ii})$, dove indichiamo $m = (m_1, \dots, m_d)$ il vettore delle medie di X e $\Sigma = (\sigma_{ij})_{ij}$ la matrice delle covarianze (si indica allora $X \sim N(m, \Sigma)$).

2. Dimostrare che la funzione caratteristica di X è

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{i\langle t,X\rangle}] = \exp\left(i\langle t, m\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma t, t\rangle\right)$$

3. Se due vettori aleatori gaussiani X e Y sono tali che $m_X = m_Y$ e $\Sigma_X = \Sigma_Y$, allora hanno la stessa legge.

Esercizio 2. Siano date variabili aleatorie indipendenti gaussiane $X_i \sim N(m_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \dots, d$.

1. Dimostrare che il vettore aleatorio $X = (X_1, \dots, X_d)$ è gaussiano, e calcolarne vettore delle medie e matrice delle covarianze.

2. Dimostrare che, se Y è un vettore aleatorio gaussiano con componenti scorrelate, allora le componenti sono indipendenti.

Esercizio 3. Sia $X \sim N(0, 1)$.

1. Dimostrare che esiste $a > 0$ tale che $\mathbb{P}\{|X| > a\} = \frac{1}{2}$.

2. Definita

$$Y := X\mathbf{1}_{\{|X|\le a\}} - X\mathbf{1}_{\{|X|>a\}}$$

   dimostrare che $Y \sim N(0, 1)$.

3. Dimostrare che X e Y non sono indipendenti, ma Cov $(X, Y) = 0$.

Esercizio 4. Siano $X, Y \sim Ca(1)$ indipendenti.

1. Calcolare la legge di $2X$?

2. Calcolare la legge di $X + Y$.

3. Fornire un controesempio all'affermazione (falsa): *se due variabili aleatorie X e Y sono tali che $\varphi_X\varphi_Y = \varphi_{X+Y}$, allora sono indipendenti.*

Soluzioni su `http://www.math.unipd.it/~vargiolu/CalPro/`