**Esercizi di Calcolo delle Probabilità della 9$^a$ settimana (Corso di Laurea in Matematica, Università degli Studi di Padova).**

**Esercizio 1.** Sia $N$ un processo di Poisson di parametro $\lambda$. Dimostrare che, per ogni $t > 0$, $N_t \sim Po(\lambda t)$.

**Esercizio 2.** Ricordiamo che un processo di Poisson di parametro $\lambda > 0$ è un processo $N^\lambda = (N_t^\lambda)_{t\geq 0}$ tale che $N_t^\lambda \sim Po(\lambda t)$ per ogni $t \geq 0$. Fissiamo un parametro $\lambda > 0$.

1. Dando per noto che per ogni $s < t$, $N_t^\lambda - N_s^\lambda$ è indipendente da $\mathcal{F}_s := \sigma(N_u^\lambda \mid u \leq s)$, dimostrare che $(N_t^\lambda - \lambda t)_t$ è una martingala.
2. Calcolare la funzione caratteristica di $N_t^{\lambda/a} - \frac{\lambda}{a}t$ per $a > 0$.
3. Detta $Y_t^a := a(N_t^{\lambda/a} - \frac{\lambda}{a}t)$, dimostrare che $Y_t^a \rightharpoonup 0$ per $a \to 0$ per ogni $t \geq 0$.
4. Detta $Z_t^a := \sqrt{a}(N_t^{\lambda/a} - \frac{\lambda}{a}t)$, dimostrare che $Z_t^a \rightharpoonup N(0, \lambda t)$ per $a \to 0$ per ogni $t \geq 0$.

**Esercizio 3.** Dato un tempo di arresto $\tau$ rispetto a una filtrazione $(\mathcal{F}_n)_n$, definiamo

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F}_\infty \mid A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \in I\}$$

dove $\mathcal{F}_\infty = \cup_{n\in I}\mathcal{F}_n$ (che a priori potrebbe essere contenuta strettamente in $\mathcal{A}$). Dimostrare che:

a) $\mathcal{F}_\tau$ è una $\sigma$-algebra che contiene $\sigma(\tau)$;

b) se $\tau_1$, $\tau_2$ sono tempi di arresto, allora anche $\tau_1 \wedge \tau_2$ e $\tau_1 \vee \tau_2$ lo sono, e $\{\tau_1 < \tau_2\}, \{\tau_1 \leq \tau_2\}, \{\tau_1 = \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$.

c) se $\tau_1$, $\tau_2$ sono tempi di arresto tali che $\tau_1 \leq \tau_2$, allora $\mathcal{F}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{F}_{\tau_2}$.

**Esercizio 4.** Siano $(X_n^1)_n$ e $(X_n^2)_n$ due processi di Bernoulli indipendenti di parametro 1/2, e definiamo per $i = 1, 2$:

$$S_n^i := \sum_{k=1}^n X_k^i, \quad M_n^i := 2S_n^i - n, \quad M_n^{12} := M_n^1 M_n^2, \quad \mathcal{F}_n := \sigma(X_m^1, X_m^2 \mid m \leq n)$$

Fissato $a \in \mathbb{N}$, definiamo inoltre:

$$\tau := \inf\{n \mid \max(S_n^1, S_n^2) \geq a\}, \qquad \tau_i := \inf\{n \mid S_n^i \geq a\}, \quad i = 1, 2$$

a) Dimostrare che $M^1$, $M^2$, $M^{12}$ sono martingale rispetto a $(\mathcal{F}_n)_n$;

b) Dimostrare che $\tau$, $\tau_1$, $\tau_2$ sono tempi di arresto;

c) Tramite una legge dei grandi numeri, dimostrare che $S_n^i \to \infty$ quasi certamente, e quindi $\tau$, $\tau_1$, $\tau_2$ sono quasi certamente finiti.

**Esercizio 5.** Sia $Y_n$ il capitale di una compagnia di assicurazioni dopo $n$ anni. Ogni anno $n \geq 1$, la compagnia riceve un totale (costante) di premi pari a $P$ e paga un totale di sinistri pari a $C_n$, con $(C_n)_n$ i.i.d. di legge $N(\mu, \sigma^2)$: abbiamo quindi che il capitale all'inizio dell'anno $n+1$ è

$$Y_{n+1} = Y_n + P - C_{n+1}$$

dove $Y_0 > 0$ è costante. Definiamo poi $\tau := \inf\{n \mid Y_n \leq 0\}$ il **tempo di bancarotta** della compagnia.

1. Per quale $t \neq 0$ il processo $(e^{tY_n})_n$ è una martingala rispetto alla sua filtrazione naturale?

2. Ponendo $Z_n := \min(e^{tY_n}, 1)$ con $t$ che soddisfa il punto 1., dimostrare che $(Z_n)_n$ è una supermartingala.

3. Supponendo che $P > \mu$, dimostrare che per ogni $m \geq 1$ si ha

$$\mathbb{P}\{\tau \leq m\} \leq \exp\left(-\frac{2(P-\mu)}{\sigma^2} Y_0\right)$$

Suggerimento: usare il teorema di arresto sulla supermartingala $Z$ e sul tempo di arresto $\tau \wedge m$.

**Esercizio 6.** Supponiamo che un giocatore abbia un capitale iniziale di 1 Euro al tempo $n = 0$, e giochi al seguente gioco: ad ogni partita, in caso di vittoria il suo capitale raddoppia con probabilità $p$, e si dimezza con probabilità $1-p$, con $p \in (0,1)$. Supponiamo inoltre che i risultati delle partite siano indipendenti l'uno dall'altro.

1. Costruire, su un opportuno spazio probabilizzato, una successione di variabili aleatorie $(X_n)_n$ tali che ad ogni istante $n \in \mathbb{N}$, $X_n$ rappresenti il capitale del giocatore all'istante $n$.

2. Determinare per quale $p$ il processo $X$ è una martingala.

3. Calcolare, per i diversi valori di $p \in (0,1)$, $\lim_{n\to\infty} E[X_n]$.

4. Dimostrare che se $p < 1/2$, allora $X_n \overset{\text{q.c.}}{\to} 0$ (suggerimento: considerare $S_n := \log X_n$ e usare la legge forte dei grandi numeri).

Nota: l'esercizio ci dice che se $p \in (1/3, 1/2)$, allora il capitale converge quasi certamente verso 0, nonostante che l'aspettativa di vincita diverga).

**Esercizio 7.** Sia $(X_n)_n$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. tali che $\mathbb{P}\{X_n = \pm 1\} = 1/2$ per ogni $n$, $(a_n)_n$ una successione e definiamo

$$Y_n := \sum_{k=1}^{n} a_k X_k$$

1. Dimostrare che $Y$ è una martingala rispetto alla sua filtrazione naturale.

2. Dimostrare che $Y$ è limitata in $L^2$ (cioè $\sup_n \|Y_n\|_{L^2} < +\infty$) se e solo se $\sum_{k=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$.

3. Dimostrare che se $\sum_{k=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$, allora esiste $Y$ tale che $Y_n \xrightarrow{\text{q.c.}} Y$.

**Soluzioni su** `http://www.math.unipd.it/~vargiolu/CalPro/`