

Esercizi di Calcolo delle Probabilità della 1^a settimana (Corso di Laurea in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Esercizio 1. Se $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ è uno spazio probabilizzato e chiamiamo

$$\mathcal{N} := \{N \in \mathcal{A} \mid \mathbb{P}(N) = 0\}, \quad \bar{\mathcal{A}} := \{E \cup F \mid E \in \mathcal{A}, F \subseteq N \text{ per qualche } N \in \mathcal{N}\}$$

Dimostrare che $\bar{\mathcal{A}}$ è una σ -algebra.

Esercizio 2. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato, $H \in \mathcal{A}$ non trascurabile e $\mathbb{P}_H$ la probabilità condizionata ad H . Dimostrare che, se $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, allora si ha anche $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_H)$ e

$$E_{\mathbb{P}_H}[X] = \int_{\Omega} X \, d\mathbb{P}_H = E_{\mathbb{P}} \left[X \frac{\mathbf{1}_H}{\mathbb{P}(H)} \right] = \frac{E_{\mathbb{P}}[X \mathbf{1}_H]}{\mathbb{P}(H)}$$

Suggerimento: considerare in successione i casi:

1. $X \in L^+(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ed è una v.al. semplice;
2. $X \in L^+(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$;
3. $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Esercizio 3. Sia $(X_n)_{n \geq 1}$ una successione di variabili aleatorie, e $(\mathcal{F}_n)_n$ una famiglia di σ -algebre su Ω tali che X_n è $\mathcal{F}_n$ -misurabile e che $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$ per ogni $n \geq 1$. Definiamo poi

$$S_n := \prod_{i=1}^n X_i \quad \forall n \geq 1$$

1. Dimostrare che S_n è una variabile aleatoria $\mathcal{F}_n$ -misurabile per ogni $n \in \mathbb{N}^*$;
2. Sia $\tau := \inf\{n \mid S_n \geq a\}$ per un $a > 0$ fissato. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, l'evento $\{\tau \geq n\} \in \mathcal{F}_{n-1}$.

Esercizio 4. In una popolazione di batteri, supponiamo che nel passaggio da una generazione all'altra ogni individuo i della generazione $n \geq 1$ generi un numero (naturale!) aleatorio $Y_i^{(n)}$ di altri individui e muoia; supponiamo che le $(Y_i^{(n)})_{i,n \geq 1}$ siano i.i.d. Il numero di batteri alla n -esima generazione sarà quindi

$$S_{n+1} = \sum_{i=1}^{S_n} Y_i^{(n)}$$

Supponiamo che $S_1 = 1$, e definiamo $X_n = S_n / \mu^n$. Dimostrare che:

1. S_n è $\sigma(Y_i^{(1)}, \dots, Y_i^{(n-1)} \mid i \geq 1)$ -misurabile per ogni $n > 1$.
2. $\sigma(X_1, \dots, X_n) = \sigma(S_1, \dots, S_n) \subseteq \sigma(Y_i^{(1)}, \dots, Y_i^{(n-1)} \mid i \geq 1)$ per ogni $n \geq 1$;

Esercizio 5. Supponiamo di avere lo stesso modello di popolazione dell'esercizio precedente. Dando per noto che per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, S_n è indipendente da $(Y_i^{(n)})_i$ e che le $(Y_i^{(n)})_{i,n}$ sono di media μ e varianza σ^2 :

- a) dimostrare che $\mathbb{E}[S_{n+1} \mid S_n] = \mu S_n$;
- b) calcolare $\mathbb{E}[S_{n+1}^2]$ in funzione di momenti di S_n (suggerimento: condizionare rispetto a S_n).

Esercizio 6. Sia $(X_n)_n$ una successione di variabili aleatorie tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si abbia $X_n \in L^2$ e $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n$, dove $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$. Dimostrare che per ogni $i < j < k$ si ha:

- a) $\mathbb{E}[(X_k - X_j)X_i] = 0$,
- b) $\mathbb{E}[(X_k - X_j)^2 \mid \mathcal{F}_i] = \mathbb{E}[X_k^2 \mid \mathcal{F}_i] - \mathbb{E}[X_j^2 \mid \mathcal{F}_i]$.

Soluzioni

Esercizio 1. Siccome $\mathcal{A}$ e $\mathbb{N}$ sono chiuse per unioni numerabili, anche $\bar{\mathcal{A}}$ lo é. Preso un generico elemento $E \cup F \in \bar{\mathcal{A}}$, con $F \subset N \in \mathbb{N}$, possiamo assumere che $E \cap N = \emptyset$ (altrimenti possiamo rimpiazzare F, N con $F \setminus E, N \setminus E$). Allora $E \cup F = (E \cup N) \cap (N^c \cup F)$, quindi $(E \cup F)^c = (E \cup N)^c \cup (N \setminus F)$. Ma $(E \cup N)^c \in \mathcal{M}$ e $(N \setminus F) \subseteq N \in \mathbb{N}$, quindi $(E \cup F)^c \in \mathcal{M}$, e quindi $\bar{\mathcal{M}}$ è una σ -algebra.

Esercizio 2. Seguendo il suggerimento, consideriamo i diversi casi:

1. Supponiamo all'inizio che $X = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$, con $a_i \geq 0, A_i \in \mathcal{A}$: allora

$$E_{\mathbb{P}_H}[X] = E_{\mathbb{P}_H} \left[\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i} \right] = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{P}_H(A_i) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\mathbb{P}(A_i \cap H)}{\mathbb{P}(H)} = \frac{1}{\mathbb{P}(H)} \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{P}(A_i \cap H)$$

e anche

$$E_{\mathbb{P}}[X \mathbf{1}_H] = E_{\mathbb{P}} \left[\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i} \mathbf{1}_H \right] = E_{\mathbb{P}} \left[\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i \cap H} \right] = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{P}(A_i \cap H)$$

e quindi si ha la tesi.

2. Se $X \in L^+$ ma non è necessariamente semplice, allora esistono $(X_n)_n \subset L^+$ e semplici tali che $X_n \nearrow X$. Allora si ha anche che $X_n \mathbf{1}_H \nearrow X \mathbf{1}_H$, e usando due volte il teorema di convergenza monotona (la prima su $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_H)$ e la seconda su $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$) si ha

$$E_{\mathbb{P}_H}[X] = \lim_{n \rightarrow \infty} E_{\mathbb{P}_H}[X_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_{\mathbb{P}}[X_n \mathbf{1}_H]}{\mathbb{P}(H)} = \frac{E_{\mathbb{P}}[X \mathbf{1}_H]}{\mathbb{P}(H)}$$

3. Infine, se $X \in L^1$, allora scriviamo $X = X^+ - X^-$; ovviamente $X \mathbf{1}_H \in L^1$, difatti $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X \mathbf{1}_H|] \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[|X|] < +\infty$. Si ha anche che $X = X^+ - X^- \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_H)$: difatti $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_H}[X^+] = \frac{E_{\mathbb{P}}[X^+ \mathbf{1}_H]}{\mathbb{P}(H)} < +\infty$ per il punto precedente, e allo stesso modo $\mathbb{E}_{\mathbb{P}_H}[X^-] = \frac{E_{\mathbb{P}}[X^- \mathbf{1}_H]}{\mathbb{P}(H)} < +\infty$; allora

$$E_{\mathbb{P}_H}[X] = E_{\mathbb{P}_H}[X^+] - E_{\mathbb{P}_H}[X^-] = \frac{E_{\mathbb{P}}[X^+ \mathbf{1}_H] - E_{\mathbb{P}}[X^- \mathbf{1}_H]}{\mathbb{P}(H)} = \frac{E_{\mathbb{P}}[X \mathbf{1}_H]}{\mathbb{P}(H)}$$

Esercizio 3.

1. $S_n = \varphi_n(X_1, \dots, X_n)$, dove $\varphi_n(x_1, \dots, x_n) := x_1 \dots x_n$ è misurabile da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$, e X_m è $\mathcal{F}_m$ -misurabile per ipotesi; ma siccome $\mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_n$ per ogni $m \leq n$, allora X_m è anche $\mathcal{F}_n$ -misurabile, e quindi il vettore $(X_1, \dots, X_n)$ è $\mathcal{F}_n$ -misurabile. Da questo segue che $S_n = \varphi_n \circ (X_1, \dots, X_n)$ è $\mathcal{F}_n$ -misurabile.
2. Abbiamo che

$$\{\tau \geq n\} = \{S_1 < a, \dots, S_{n-1} < a\} = \bigcap_{m=1}^n \{S_m < a\}$$

Dal punto 1. sappiamo che S_m è $\mathcal{F}_m$ -misurabile per ogni $m \leq n$, ma abbiamo anche che $\mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_n$ per ogni $m \leq n$, quindi $\{S_m < a\} \in \mathcal{F}_n$ per ogni $m \leq n$, e di conseguenza $\{\tau \geq n\} = \bigcap_{m=1}^n \{S_m < a\} \in \mathcal{F}_n$.

Esercizio 4.

1. Per induzione su n : per $n = 2$ si ha che $S_2 = Y_1^{(1)}$, che è ovviamente $\sigma(Y_1^{(1)})$ -misurabile. Supponiamo ora che la tesi sia vera per n . Allora possiamo scrivere S_{n+1} come

$$S_{n+1} = \sum_{i \geq 1} Y_i^{(n)} \mathbf{1}_{i \leq S_n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N Y_i^{(n)} \mathbf{1}_{i \leq S_n}$$

Per ogni N fissato la variabile aleatoria $\sum_{i=1}^N Y_i^{(n)} \mathbf{1}_{i \leq S_n}$ è somma di variabili aleatorie che sono tutte $\sigma(Y_i^{(0)}, \dots, Y_i^{(n)} | i \geq 1)$ -misurabili per ipotesi induttiva; allora anche $S_{n+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N Y_i^{(n)} \mathbf{1}_{i \leq S_n}$ è $\sigma(Y_i^{(0)}, \dots, Y_i^{(n)} | i \geq 1)$ -misurabile.

2. Dal punto 1 segue che $S_1, \dots, S_n$ sono $\sigma(Y_i^{(0)}, \dots, Y_i^{(n-1)} | i \geq 1)$ -misurabili, e quindi si ha che $\sigma(S_1, \dots, S_n) \subseteq \sigma(Y_i^{(0)}, \dots, Y_i^{(n-1)} | i \geq 1)$. Inoltre, siccome per ogni n fissato X_n è funzione continua di S_n e viceversa, si ha che $\sigma(X_n) \subseteq \sigma(S_n)$ e $\sigma(S_n) \subseteq \sigma(X_n)$, cioè $\sigma(X_n) = \sigma(S_n)$, e di conseguenza anche $\sigma(X_1, \dots, X_n) = \sigma(S_1, \dots, S_n)$.

Esercizio 5.

- a) Fissato $n \in \mathbb{N}^*$, calcoliamo:

$$\mathbb{E}[S_{n+1} | S_n] = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{i \leq S_n\}} Y_i^{(n)} \mid S_n \right] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{i \leq S_n\}} \mathbb{E}[Y_i^{(n)} | S_n] = \sum_{i=1}^{S_n} \mathbb{E}[Y_i^{(n)}] = \mu S_n$$

dove abbiamo usato il teorema di integrazione per serie positive e il fatto che $Y_i^{(n)}$ e S_n sono indipendenti.

- b) Consideriamo la speranza condizionale rispetto a S_n :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_{n+1}^2] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_{n+1}^2 | S_n]] = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^{S_n} (Y_i^{(n)})^2 + \sum_{i,j=1, i \neq j}^{S_n} Y_i^{(n)} Y_j^{(n)} \mid S_n \right] \right] = \\ &= \mathbb{E}[S_n \mathbb{E}[(Y_i^{(n)})^2] + S_n(S_n - 1) \mathbb{E}[Y_i^{(n)}]^2] = \\ &= (\mu^2 + \sigma^2) \mathbb{E}[S_n] + \mu^2 \mathbb{E}[S_n^2] - \mu^2 \mathbb{E}[S_n] = \mu^2 \mathbb{E}[S_n^2] + \sigma^2 \mathbb{E}[S_n] \end{aligned}$$

Esercizio 6. Prima di tutto notiamo che l'ipotesi è equivalente a $\mathbb{E}[X_{n+m} | \mathcal{F}_n] = X_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $m > 1$. Infatti si ha:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{n+m} | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[\dots \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{n+m} | \mathcal{F}_{n+m-1}] | \mathcal{F}_{n+m-2}] \dots | \mathcal{F}_n] = \\ &= \mathbb{E}[\dots \mathbb{E}[X_{n+m-1} | \mathcal{F}_{n+m-2}] \dots | \mathcal{F}_n] = \\ &= \dots = \\ &= X_n \end{aligned}$$

- a) Si ha:

$$\mathbb{E}[(X_k - X_j)X_i] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[(X_k - X_j)X_i | \mathcal{F}_i]] = \mathbb{E}[X_i \mathbb{E}[X_k - X_j | \mathcal{F}_i]] = \mathbb{E}[X_i \cdot 0] = 0$$

b) Basta notare che nel doppio prodotto si ha

$$\mathbb{E}[X_k X_j | \mathcal{F}_i] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_k X_j | \mathcal{F}_j] | \mathcal{F}_i] = \mathbb{E}[X_j \mathbb{E}[X_k | \mathcal{F}_j] | \mathcal{F}_i] = \mathbb{E}[X_j X_j | \mathcal{F}_i] = \mathbb{E}[X_j^2 | \mathcal{F}_i]$$

Da questo segue

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_k - X_j)^2 | \mathcal{F}_i] &= \mathbb{E}[X_k^2 - 2X_k X_j + X_j^2 | \mathcal{F}_i] = \\ &= \mathbb{E}[X_k^2 | \mathcal{F}_i] - 2\mathbb{E}[X_k X_j | \mathcal{F}_i] + \mathbb{E}[X_j^2 | \mathcal{F}_i] = \\ &= \mathbb{E}[X_k^2 | \mathcal{F}_i] - 2\mathbb{E}[X_j^2 | \mathcal{F}_i] + \mathbb{E}[X_j^2 | \mathcal{F}_i] = \mathbb{E}[X_k^2 | \mathcal{F}_i] - \mathbb{E}[X_j^2 | \mathcal{F}_i] \end{aligned}$$