Esercizi di Calcolo delle Probabilità della 10^a settimana (Corso di Laurea in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Esercizio 1. Una obbligazione può avere *rating* A, B, C o D e passare da un rating all'altro secondo la matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.09 & 0.009 & 0.001 \\ 0.05 & 0.9 & 0.04 & 0.01 \\ 0.01 & 0.04 & 0.9 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Qual è la probabilità che una obbligazione con *rating* B sia insolvente (cioè nello stato D) dopo 2 anni?

2. Se sul mercato il 40% delle obbligazioni hanno *rating* A, il 30% hanno *rating* B e il 30% hanno *rating* C, quante obbligazioni saranno fallite dopo 2 anni?

Esercizio 2. Sia $(X_n)_n$ un processo di Bernoulli di parametro p, $(\mathcal{F}_n)_n$ la sua filtrazione naturale, e definiamo per ogni $N \geq 1$ le due variabili aleatorie

$$S_N := \sum_{n=1}^{N} X_n, \qquad \tau_N := \min\{n \mid S_n = N\}$$

Fissato $N \geq 1$, dimostrare che

1. per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\{\tau_N \leq n\} = \{S_n \geq N\}$, e quindi τ_N è un tempo di arresto rispetto a $(\mathcal{F}_n)_n$;

2. $(S_n)_n$ è una catena di Markov; specificarne legge iniziale e nucleo di transizione;

3. $S^{|\tau_N}$ è una catena di Markov; specificarne legge iniziale e nucleo di transizione;

4. Classificare gli stati della catena S e della catena $S^{|\tau_N}$.

Esercizio 3. Una persona va a correre ogni mattina. Sia quando esce di casa che quando vi rientra dopo la corsa, lo fa con uguale probabilità dalla porta di fronte o da quella sul retro. Il corridore possiede 5 paia di scarpe da jogging e le lascia fuori dalla porta dalla quale rientra dalla corsa. Se quando esce da una porta non trova alcun paio di scarpe, allora va a correre scalzo. Possiamo quindi modellizzare lo "stato del sistema" mediante il numero di paia di scarpe fuori dagli ingressi, ponendo

$$E := \{5|0(s), 5|0, 4|0, 4|1, 3|1, 3|2, 2|2, 2|3, 1|3, 1|4, 0|4, 0|5, 0|5(s)\}$$

Gli stati segnati con (s) corrispondono a quelli in cui il corridore corre scalzo. Per comodità assegnamo un'etichetta ordinale agli elementi di E come sono sopra a partire da 0 (cosicchè $\{0\} = \{5|0(s)\}$, $\{1\} = \{5|0\}$ ecc.) Tutti gli stati pari così corrispondono al fatto che la persona sta correndo, mentre negli stati dispari la persona è in casa.

1. Definire un'opportuna catena di Markov $(X_n)_n$ che modellizzi il fenomeno, specificando la matrice di transizione P.

2. Classificare gli stati della catena di Markov X.

3. Consideriamo $F = \{5|0(s), 4|0, 3|1, 2|2, 1|3, 0|4, 0|5(s)\}$ o $F = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ (a seconda della convenzione seguita), che sono gli stati in cui la persona è fuori a correre. Dimostrare che se $X_0 \in F$ allora $Y = (Y_n)_n = (X_{2n})_n$ è una catena di Markov a valori in F e di matrice di transizione $P^2|_F$.

4. Classificare gli stati della catena di Markov Y.

5. Dando per noto che Y è regolare, determinare la probabilità a lungo termine che la persona corra scalza.

Esercizio 4. Un modello biologico (*Nature Letters* 2006) prevede che il numero di cellule adiacenti ad una cellula "tipica" all'interno di un foglio epiteliale di un tessuto, ad ogni mitosi, segua una catena di Markov con matrice di transizione data da

$$p_{ij} = \mathbb{P}\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = \binom{i-4}{j-5}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-4}, \qquad 5 \le j \le i+1$$

In particolare, lo spazio degli stati è costituito da $E := \{4, 5, 6, \ldots\}$ (i.e. ogni cellula confina almeno con 4 cellule).

1. Classificare gli stati di E.

2. Dimostrare che la legge di X_{n+1} condizionata a X_n è data da $\delta_5 * B(X_n - 4; \frac{1}{2})$, dove δ_5 è la delta di Dirac centrata nello stato $\{5\}$.

3. Dimostrare che $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid X_n] = \frac{1}{2}X_n + 3$.

4. Dimostrare che $\mathbb{E}[X_n] = 6 + \frac{1}{2^n}(\mathbb{E}[X_0] - 6)$.

Esercizio 5. Su un ponte, ogni cinque camion quattro sono seguiti da un'automobile, mentre una automobile su sei è seguita da un camion.

1. Modellizzare il fenomeno con una catena di Markov $(X_n)_n$ a valori nell'insieme $\{A, C\}$, specificandone la matrice di transizione.

2. Supponiamo che sia appena passato un'auto, e definiamo

$$\tau := \inf\{n | X_n = A\}$$

come il tempo da attendere perchè passi la prossima auto. Calcolare $\mathbb{P}\{\tau = n \mid X_0 = A\}$ per ogni $n \ge 1$. Che legge ha?

3. Che proporzioni ci attendiamo, per n grande, per le auto e i camion?

Soluzioni su `http://www.math.unipd.it/~vargiolu/CalPro/`

Soluzioni

Esercizio 1.

1. Bisogna calcolare $p^{(2)}_{BD} = \mathbb{P}\{X_{n+2} = D \mid X_n = B\}$:

$$\begin{aligned} p^{(2)}_{BD} &= \mathbb{P}\{X_{n+2} = D \mid X_n = B\} = \mathbb{P}\{X_2 = D \mid X_0 = B\} = P^2|_{BD} = \\ &= 0.05 \cdot 0.001 + 0.9 \cdot 0.01 + 0.04 \cdot 0.05 + 0.01 \cdot 1 = 0.02105 \end{aligned}$$

2. Definiamo $\mu := \mathbb{P}_{X_0} = (0.4, 0.3, 0.3, 0)$. Allora dobbiamo calcolare

$$\mathbb{P}\{X_2 = D\} = \sum_{x=A,B,C} \mathbb{P}\{X_2 = D \mid X_0 = x\}\mathbb{P}\{X_0 = x\} = \sum_{x=A,B,C} P^2|_{xD} \cdot \mu_x$$

e, analogamente al punto 1., si ha

$$\begin{aligned} p^{(2)}_{AD} &= P^2|_{AD} = 0.9 \cdot 0.001 + 0.09 \cdot 0.01 + 0.009 \cdot 0.05 + 0.001 \cdot 1 = 0.00325 \\ p^{(2)}_{CD} &= P^2|_{CD} = 0.01 \cdot 0.001 + 0.04 \cdot 0.01 + 0.9 \cdot 0.05 + 0.05 \cdot 1 = 0.09541 \end{aligned}$$

e quindi

$$\mathbb{P}\{X_2 = D\} = 0.00325 \cdot 0.4 + 0.02105 \cdot 0.3 + 0.09541 \cdot 0.3 = 0.036238$$

Esercizio 2.

1. Innanzitutto notiamo che S ha traiettorie crescenti. Poichè $S_0 \equiv 0$, si ha

$$\{\tau_N > n\} = \{S_1 < N, \dots, S_n < N\} = \{S_n < N\} \in \mathcal{F}_n$$

quindi $\{\tau_N \leq n\} = \{S_n \geq N\}$ e τ_N è un tempo di arresto.

2. Siccome $S_0 \equiv 0$, ovviamente la legge iniziale è δ_0. Per ogni $s_0, s_1, \dots, x, y$ tali che $\mathbb{P}\{S_0 = s_0, S_1 = s_1, \dots, S_n = x\} > 0$, si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{S_{n+1} &= y \mid S_0 = s_0, S_1 = s_1, \dots, S_n = x\} = \\ &= \mathbb{P}\{S_n + X_{n+1} = y \mid S_0 = s_0, S_1 = s_1, \dots, S_n = x\} = \\ &= \mathbb{P}\{X_{n+1} = y - x \mid S_0 = s_0, S_1 = s_1, \dots, S_n = x\} = \mathbb{P}\{X_{n+1} = y - x\} = \\ &= Be(p)(\{y - x\}) = p\delta_{x+1}(\{y\}) + (1-p)\delta_x(\{y\}) \end{aligned}$$

e quindi $(S_n)_n$ è una catena di Markov, con nucleo di transizione $N(x, \cdot) := p\delta_{x+1} + (1-p)\delta_x$.

È forse più intuitivo specificare la matrice di transizione: per ogni $i, j \in \mathbb{N}$,

$$p_{ij} = \mathbb{P}\{S_{n+1} = j \mid S_n = i\} = \begin{cases} p & \text{se } j = i + 1, \\ 1 - p & \text{se } j = i, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

3. Siccome $S_0^{|\tau_N} = S_0 \equiv 0$, ovviamente la legge iniziale è ancora δ_0. Per ogni $s_0, s_1, \dots, x, y$ tali che $\mathbb{P}\{S_0^{|\tau_N} = s_0, S_1^{|\tau_N} = s_1, \dots, S_n^{|\tau_N} = x\} > 0$, bisogna ora distinguere due casi: se $x < N$, allora si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{S_{n+1}^{|\tau_N} &= y \mid S_0^{|\tau_N} = s_0, S_1^{|\tau_N} = s_1, \dots, S_n^{|\tau_N} = x\} = \\ &= \mathbb{P}\{S_{n+1} = y \mid S_0 = s_0, S_1 = s_1, \dots, S_n = x\}\end{aligned}$$

e quindi per $x < N$ il nucleo di transizione è ancora $N(x, \cdot) := p\delta_{x+1} + (1-p)\delta_x$. Se invece $x = N$, allora $S_{n+1}^{|\tau_N} = S_n^{|\tau_N} = x$, e quindi

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{S_{n+1}^{|\tau_N} &= y \mid S_0^{|\tau_N} = s_0, S_1^{|\tau_N} = s_1, \dots, S_n^{|\tau_N} = N\} = \\ &= \mathbb{P}\{S_n^{|\tau_N} = y \mid S_0^{|\tau_N} = s_0, S_1^{|\tau_N} = s_1, \dots, S_n^{|\tau_N} = N\} = \delta_N(\{y\})\end{aligned}$$

e quindi $N(N, \cdot) = \delta_N$. La matrice di transizione è ora, per ogni $i, j = 0, \dots, N$,

$$\tilde{p}_{ij} = \mathbb{P}\{S_{n+1}^{|\tau_N} = j \mid S_n^{|\tau_N} = i\} = \begin{cases} p & \text{se } j = i+1, i < N, \\ 1-p & \text{se } j = i, i < N, \\ 1 & \text{se } j = i = N, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

4. Nella catena di Markov S, si vede che ogni numero naturale n comunica con $n+1$, ma non vale il viceversa: quindi gli stati sono tutti transitori. Invece, nella catena di Markov $S^{|\tau}$, questo è vero per ogni $i < N$, mentre lo stato N comunica solo con se stesso. Quindi lo stato N è assorbente, mentre tutti gli altri stati $\{0, \dots, N-1\}$ sono transitori.

Esercizio 3.

1. Basta definire un processo stocastico $X = (X_n)_n$ che sia una catena di Markov su E con matrice di transizione $P = (p_{ij})_{ij}$ specificata come segue: se $i = 0$, allora $p_{ij} = 1$ solo per $j = 1$ e $p_{ij} = 0$ se $j \neq 1$; allo stesso modo, se $i = 12$, allora $p_{ij} = 1$ solo per $j = 11$ e $p_{ij} = 0$ se $j \neq 11$; se $i \neq 0, 12$ allora $p_{ij} = 1/2$ se $|i - j| = 1$ e 0 altrimenti. Abbiamo quindi

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } |i-j| = 1, i \neq 0, 12, \\ 1 & \text{se } i = 0, j = 1 \text{ o } i = 12, j = 11, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

2. Si può vedere subito che $i \longleftrightarrow i+1$ per ogni $i = 1, \dots, 11$, quindi tutti gli stati comunicano fra di loro. Inoltre, essendo E finito, esiste almeno uno stato ricorrente, quindi tutti gli stati sono ricorrenti.

3. Il fatto che Y sia una catena di Markov segue dalle proprietà di X e delle catene di Markov. Infatti per ogni $i, j \in E$ si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{Y_{n+1} = j \mid Y_0 = y_0, \dots, Y_n = i\} &= \mathbb{P}\{X_{2n+2} = j \mid X_0 = y_0, \dots, X_{2n} = i\} = \\ = \mathbb{P}\{X_{2n+2} = j \mid X_{2n} = i\} &= \mathbb{P}\{Y_{n+1} = j \mid Y_n = i\} = \sum_k p_{ik} p_{kj}\end{aligned}$$

che non è altro che la componente (i,j) della matrice P^2.

Resta da dimostrare che se $X_0 \in F$ allora Y assume valori in F q.c., che può essere provato per induzione. Difatti, se la tesi è vera per Y_n, allora per ogni $i \in F$,

$$\mathbb{P}\{Y_{n+1} = j \mid Y_n = i\} = \sum_{\ell} p_{i\ell}p_{\ell j} = p_{i,i-1}p_{i-1,j} + p_{i,i+1}p_{i+1,j}$$

(con la convenzione che se $i-1, i+1 \notin E$, allora l'elemento della matrice vale 0). Questa probabilità è maggiore di zero solo se j ha la stessa parità di i, cioè solo se $j \in F$, e rimane provata la tesi. Notiamo che

$$P^2|_F = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

4. Con un ragionamento analogo al punto 2., anche gli stati di F sono tutti ricorrenti per Y.

5. Bisogna calcolare $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{Y_n = 0 \text{ o } Y_n = 12\}$. Siccome Y è regolare, esiste un'unica misura invariante π, che proviamo a trovare imponendo l'equazione del bilancio dettagliato: le relazioni $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$ ci danno

$$\begin{cases} \pi_0 \cdot \frac{1}{2} = \pi_2 \cdot \frac{1}{4}, \\ \pi_i \cdot \frac{1}{4} = \pi_{i+2} \cdot \frac{1}{4} \qquad \text{per ogni } i \neq 0, 12, \\ \pi_{12} \cdot \frac{1}{2} = \pi_{10} \cdot \frac{1}{4} \end{cases}$$

che, insieme a $\sum_{i\in F} \pi_i = 1$, ci danno

$$1 = \sum_{i \in F} \pi_i = \frac{1}{2}\pi_2 + 5 \cdot \pi_2 + \frac{1}{2}\pi_2 = 6\pi_2$$

quindi $\pi_2 = \ldots = \pi_1 0 = \frac{1}{6}$, e $\pi_0 = \pi_{12} = \frac{1}{12}$. Infine, per le proprietà delle catene di Markov regolari,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{Y_n = 0 \text{ o } Y_n = 12\} = \pi_0 + \pi_{12} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

Esercizio 4.

1. Tutti gli stati comunicano con tutti, quindi sono tutti ricorrenti o tutti transitori. Poichè il numero di stati è infinito, in base alla teoria vista a lezione non possiamo dire di più.

2. Basta notare che, per ogni $x \geq 5$, la legge $\delta_5 * B(x-4; \frac{1}{2})$ è uguale a quella della variabile aleatoria $5 + B$, con $B \sim B(x-4; \frac{1}{2})$. Allora questa legge, ad ogni $y = 5, \ldots, x+1$, assegna probabilità uguale a
$$\mathbb{P}\{5 + B = y\} = \mathbb{P}\{B = y - 5\} = \binom{x-4}{y-5} \left(\frac{1}{2}\right)^{y-5} \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4-(y-5)} = \binom{x-4}{y-5} \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$$
che è esattamente la probabilità di transizione della catena di Markov $(X_n)_n$.

3. Per il punto 2., la media è data da 5 + la media di una legge $B(X_n - 4; \frac{1}{2})$, che è uguale a $\frac{1}{2}(X_n - 4) = \frac{1}{2}X_n - 2$. Abbiamo quindi
$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid X_n] = 5 + \frac{1}{2}X_n - 2 = \frac{1}{2}X_n + 3$$

4. Dal punto precedente abbiamo che
$$\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n | X_{n-1}]] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}X_{n-1} + 3\right] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[X_{n-1}] + 3 = 6 + \frac{1}{2}(\mathbb{E}[X_{n-1}] - 6)$$
Da qui, procedendo per induzione, si ottiene la tesi.

Esercizio 5.

1. Definiamo la catena di Markov $(X_n)_n$ con spazio degli stati $E := \{A, C\}$ (con significato ovvio) e nucleo $N(x, \{y\}) := p_{xy}$, con
$$P = (p_{xy})_{x,y \in E} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

2. In questo caso la legge iniziale è $\mu = \delta_A$. Se $n \geq 2$, abbiamo
$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\tau = n \mid X_0 = A\} &= \mathbb{P}\{X_1 = \ldots = X_{n-1} = C, X_n = A \mid X_0 = A\} = \\ &= p_{AC} \cdot p_{CC}^{n-2} \cdot p_{CA} = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-2} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \end{aligned}$$
dove abbiamo usato le proprietà delle catene di Markov. Per $n = 1$ abbiamo invece
$$\mathbb{P}\{\tau = 1\} = \mathbb{P}\{X_1 = A \mid X_0 = A\} = p_{AA} = \frac{5}{6}$$
La legge di τ non corrisponde a particolari leggi notevoli.

3. Dato che $p_{xy} > 0$ per ogni $x, y \in \{A, C\}$, P è regolare e quindi esiste un'unica misura invariante π, con la proprietà che $X_n \rightharpoonup \pi$ per ogni legge iniziale. Per trovarla risolviamo il sistema $\pi = \pi P$, che ci dà
$$\begin{cases} \pi_A = \frac{5}{6}\pi_A + \frac{4}{5}\pi_C \\ \\ \pi_C = \frac{1}{6}\pi_A + \frac{1}{5}\pi_C \end{cases}$$
che implica $\frac{1}{6}\pi_A = \frac{4}{5}\pi_C$. Siccome cerchiamo una misura π che sia anche di probabilità, imponendo $\pi_A + \pi_C = 1$ troviamo la soluzione $\pi = (\frac{24}{29}, \frac{5}{29})$.