

Esercizi di Calcolo delle Probabilità della 2^a settimana (Corso di Laurea in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Esercizio 1. Sia $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ e definiamo $X_n = k/2^n$ se $k/2^n \leq X < (k+1)/2^n$ per ogni $k, n \in \mathbb{N}$.

- i) Calcolare la legge di Y_n , con $Y_n := 2^n X_n$;
- ii) Dimostrare che $X_n \rightarrow X$ q.c.

Ricordiamo che $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ se la legge di X ha densità $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)$ rispetto alla misura di Lebesgue.

Esercizio 2. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato e definiamo un'altra probabilità $\mathbb{Q} := X \cdot \mathbb{P}$, cioè $\mathbb{Q}$ è la probabilità che ha densità X rispetto a $\mathbb{P}$, dove ovviamente $X \in L^+(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ e $\mathbb{E}[X] = 1$. Dimostrare che:

1. Se definiamo $\mathbb{Q}' := Y \cdot \mathbb{Q}$, con $Y \in L^+(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{Q})$ e $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y] = 1$ (dove $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ è la speranza calcolata rispetto alla probabilità $\mathbb{Q}$), allora $\mathbb{Q}'$ ha densità XY rispetto a $\mathbb{P}$, e anche $XY \in L^+(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ e $\mathbb{E}[XY] = 1$.
2. Se $X > 0$ $\mathbb{P}$ -q.c., allora si ha anche che $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\frac{1}{X}] = 1$ e $\mathbb{P} = \frac{1}{X} \cdot \mathbb{Q}$.

Nota: questo esercizio giustifica le scritture formali

$$\frac{d\mathbb{Q}'}{d\mathbb{P}} = \frac{d\mathbb{Q}'}{d\mathbb{Q}} \cdot \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \quad \text{e} \quad \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} = \frac{1}{X}$$

Esercizio 3. Sia X una variabile aleatoria reale non negativa di legge μ e tale che $\mathbb{E}[X^2] \in (0, +\infty)$, e Y una variabile aleatoria reale di legge ν tale che

$$\frac{d\nu}{d\mu}(x) = Cx^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

1. Dimostrare che se vogliamo che ν sia una legge di probabilità, allora bisogna avere $C = 1/\mathbb{E}[X^2]$.
2. Dimostrare che per $p \geq 1$, si ha che $Y \in L^p$ se e solo se $X \in L^{p+2}$.
3. Dimostrare che, per ogni $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ positiva, si ha

$$\mathbb{E}[g(Y)] = C\mathbb{E}[X^2 g(X)]$$

Esercizio 4. Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato, $X \sim N(0, 1)$ sotto $\mathbb{P}$ e definiamo $Y := X - a$, con $a \in \mathbb{R}$.

1. Dire che legge ha Y sotto $\mathbb{P}$;
2. Dimostrare che per ogni g positiva (limitata), si ha

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[g(Y)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[g(X) \exp \left(-aX - \frac{1}{2}a^2 \right) \right]$$

(il simbolo $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}$ denota la speranza fatta rispetto alla probabilità $\mathbb{P}$).

Definiamo poi $Z := \exp(aX - \frac{1}{2}a^2)$, e la nuova probabilità $\mathbb{Q}$ su $(\Omega, \mathcal{A})$ come

$$\mathbb{Q}(B) := \int_B Z \, d\mathbb{P} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_B Z]$$

e denotiamo $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$ la speranza rispetto alla probabilità $\mathbb{Q}$.

3. Dimostrare che $Y \sim N(0, 1)$ sotto $\mathbb{Q}$.

Esercizio 5.

1. Dimostrare che, se $F = F_1 + F_2$ con F_1, F_2 crescenti e continue a destra, allora $\mu_F = \mu_{F_1} + \mu_{F_2}$.
2. Sia

$$F(t) := \begin{cases} \frac{1}{4}e^t & \text{per } t < 0, \\ 1 - \frac{1}{4}e^{-t} & \text{per } t \geq 0. \end{cases}$$

Descrivere μ_F in termini di misure note.

Soluzioni

Esercizio 1.

- i) Per ogni n , Y_n è una variabile aleatoria che può assumere solo valori naturali, quindi è discreta. La sua legge è allora caratterizzata da

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{Y_n = k\} &= \mathbb{P}\left\{X_n = \frac{k}{2^n}\right\} = \mathbb{P}\left\{\frac{k}{2^n} \leq X < \frac{k+1}{2^n}\right\} = \\ &= \int_{\frac{k}{2^n}}^{\frac{k+1}{2^n}} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\frac{\lambda k}{2^n}} (1 - e^{-\frac{\lambda}{2^n}}) = p_n^k (1 - p_n)\end{aligned}$$

con $p_n := e^{-\frac{\lambda}{2^n}}$. Abbiamo quindi che $Y_n \sim Ge(1 - p_n)$.

- ii) Per definizione di X_n , abbiamo che $X_n \leq X < X_n + \frac{1}{2^n}$, quindi $X - \frac{1}{2^n} < X_n \leq X$. Dato che il primo e il terzo membro convergono q.c. a X , anche $X_n \rightarrow X$ q.c.

Esercizio 2.

1. Per ogni $A \in \mathcal{A}$ abbiamo

$$\mathbb{Q}'(A) = \int_A Y d\mathbb{Q} = \int_A YX d\mathbb{P}$$

e quindi $\mathbb{Q}'$ ha densità $XY \in L^+$ rispetto a $\mathbb{P}$; inoltre, poichè $\mathbb{Q}'$ è una probabilità, abbiamo che

$$1 = \mathbb{Q}'(\Omega) = \int_{\Omega} Y d\mathbb{Q} = \int_{\Omega} YX d\mathbb{P} = \mathbb{E}[XY]$$

2. Se $X > 0$ $\mathbb{P}$ -q.c. e definiamo $B := \{X = 0\}$, allora $\mathbb{P}(B) = 0$, e anche $\mathbb{Q}(B) = \int_B X d\mathbb{P} = 0$ poichè $X = 0$ su B , quindi $X > 0$ anche $\mathbb{Q}$ -q.c., e quindi $1/X$ è ben definita $\mathbb{Q}$ -q.c., e per ogni $A \in \mathcal{A}$ si ha

$$\int_A \frac{1}{X} d\mathbb{Q} = \int_A \frac{1}{X} \cdot X d\mathbb{P} = \int_A d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A)$$

e chiaramente $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \int_{\Omega} \frac{1}{X} d\mathbb{Q} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\frac{1}{X}]$.

Esercizio 3.

1. Se imponiamo che $\nu(\mathbb{R}^+) = 1$, allora per la formula di integrazione rispetto a una densità

$$1 = \nu(\mathbb{R}^+) = \int_{\mathbb{R}^+} Cx^2 d\mu(x) = C \int_{\mathbb{R}^+} x^2 d\mu(x) = C\mathbb{E}[X^2]$$

e quindi $C = \frac{1}{\mathbb{E}[X^2]}$.

2. Per $p \geq 1$ si ha che

$$\mathbb{E}[|Y|^p] = \int_{\mathbb{R}^+} |x|^p d\nu(x) = \int_{\mathbb{R}^+} |x|^p Cx^2 d\mu(x) = C \int_{\mathbb{R}^+} |x|^{p+2} d\mu(x) = C\mathbb{E}[|X|^{p+2}]$$

e quindi $\mathbb{E}[|Y|^p] < +\infty$ se e solo se $\mathbb{E}[|X|^{p+2}] < +\infty$.

3. Per ogni $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ positiva si ha

$$\mathbb{E}[g(Y)] = \int_{\mathbb{R}^+} g(y) d\nu(y) = \int_{\mathbb{R}^+} g(x) Cx^2 d\mu(x) = C\mathbb{E}[X^2 g(X)]$$

Esercizio 4.

1. Y è una funzione affine di una variabile aleatoria gaussiana, quindi è gaussiana, di parametri $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X] - a = -a$ e $\text{Var}_{\mathbb{P}}[Y] = \text{Var}_{\mathbb{P}}[X] = 1$, e quindi $\mathbb{P}_Y = N(-a, 1)$.

2. Per ogni g positiva (limitata), si ha che $g(Y)$ è positiva (limitata), e

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[g(Y)] &= \int_{\mathbb{R}} g(y) \frac{e^{-\frac{(y+a)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy = \int_{\mathbb{R}} g(y) \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-ay - \frac{1}{2}a^2} dy = \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[g(X) \exp \left(-aX - \frac{1}{2}a^2 \right) \right] \end{aligned}$$

3. Prendiamo un generico $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Allora

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}\{Y \in B\} &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z \mathbf{1}_B(Y)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_B(X - a) e^{aX - \frac{1}{2}a^2}] = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_B(x - a) e^{ax - \frac{1}{2}x^2} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_B(x - a) \frac{e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx = \int_B \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \end{aligned}$$

e quindi $\mathbb{Q}_Y = N(0, 1)$.

Esercizio 5.

1. Ovviamente F è crescente e c. a d., e per ogni $a \leq b$ si ha

$$\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a) = F_1(b) + F_2(b) - F_1(a) - F_2(a) = \mu_{F_1}((a, b]) + \mu_{F_2}((a, b])$$

Poichè $\mathcal{I} := \{(a, b] \mid a \leq b\}$ è una base di $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, questo basta a dimostrare che $\mu_F = \mu_{F_1} + \mu_{F_2}$ su $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2. F è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, dove ha un salto pari a $1/2$. Inoltre la sua derivata puntuale è uguale a $f(t) := \frac{1}{4}e^{-|t|}$. Questo fa pensare che un'espressione potrebbe essere

$$\mu_F = \frac{1}{2}\delta_0 + f \cdot \lambda_1$$

dove λ_1 è la misura di Lebesgue.

Proviamo ora a calcolare μ_F su h-intervalli della forma $(a, b]$: se $a < b < 0$, abbiamo

$$\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a) = \frac{1}{4}(e^b - e^a) = \frac{1}{2}\delta_0((a, b]) + \int_a^b f(t) dt$$

Se $a < 0 \leq b$, abbiamo

$$\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a) = 1 - \frac{1}{4}e^{-b} - \frac{1}{4}e^a$$

e

$$\frac{1}{2}\delta_0((a, b]) + \int_a^b f(t) dt = \frac{1}{2} + \int_{-a}^0 \frac{1}{4}e^t dt + \int_0^b \frac{1}{4}e^{-t} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(1 - e^a) + \frac{1}{4}(1 - e^{-b}) = 1 - \frac{1}{4}(e^{-b} + e^a)$$

Infine, se $0 \leq a < b$, abbiamo

$$\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a) = 1 - \frac{1}{4}e^{-b} - 1 + \frac{1}{4}e^{-a} = \frac{1}{4}e^{-a} - \frac{1}{4}e^{-b}$$

e

$$\frac{1}{2}\delta_0((a, b]) + \int_a^b f(t) dt = 0 + \int_a^b f(t) dt = \left[-\frac{1}{4}e^{-t}\right]_a^b = \frac{1}{4}e^{-a} - \frac{1}{4}e^{-b}$$

Dato che $\mu_F = \frac{1}{2}\delta_0 + f \cdot \lambda_1$ sugli h-intervalli e che questi sono una base (insieme a $\emptyset$) di $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, abbiamo che $\mu_F = \frac{1}{2}\delta_0 + f \cdot \lambda_1$ su $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.