Esercizi di Calcolo delle Probabilità della 3^a settimana (Corso di Laurea in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Esercizio 1.

1. Sia (X, Y) un vettore aleatorio bidimensionale con densità uniforme $f_{(X,Y)} := \frac{1}{\lambda_2(G)}\mathbf{1}_G$ sul cerchio $G = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, e (Z, W) un altro vettore aleatorio con densità uniforme $f_{(Z,W)} := \frac{1}{\lambda_2(R)}\mathbf{1}_R$ sul rettangolo $R = [0, 1] \times [-1, 1]$. Motivando la risposta, dire se X e Y sono indipendenti. Stessa domanda per Z e W.

2. Si consideri un punto "scelto a caso" nel cerchio unitario in modo che il raggio R abbia legge uniforme su $(0, 1)$, così come l'angolo θ formato con l'asse delle ascisse su $(0, 2\pi)$. Si consideri poi il vettore aleatorio $(X, Y) := (R\cos\theta, R\sin\theta)$. Si può dire che (X, Y) abbia legge uniforme sul cerchio unitario? Qual è la sua densità congiunta?

Esercizio 2.

1. Si scelga a caso un punto X dell'intervallo $[0, 2]$, con distribuzione uniforme di densità
$$f_X(x) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[0,2]}(x)$$
(in altre parole, X è una variabile aleatoria con densità f_X). Qual è la probabilità che il triangolo equilatero il cui lato ha lunghezza X abbia area maggiore di 1?

2. Sia (X, Y) un vettore aleatorio assolutamente continuo con densità congiunta
$$f_{X,Y}(x, y) = 2 \cdot \mathbf{1}_T(x, y),$$
dove T è il triangolo di vertici $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$. Determinare le densità marginali di X e Y.

Esercizio 3. Siano $X, Y \sim U(0, 1)$ indipendenti, e
$$\begin{cases} Z &= \sqrt{-2\log X}\cos(2\pi Y) \\ W &= \sqrt{-2\log X}\sin(2\pi Y). \end{cases}$$
Determinare la distribuzione del vettore (Z, W). Z e W sono indipendenti?

Esercizio 4. Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. tali che
$$\mathbb{P}\{X_n = u\} = p, \quad \mathbb{P}\{X_n = d\} = 1 - p \quad \forall n \geq 1$$
con $p \in (0, 1)$ e u, d tali che $0 < d < 1 < u$. Definiamo $\mathcal{F}_n = \sigma(X_m | m \leq n)$ e
$$S_n := S_0 \prod_{i=1}^{n} X_i \quad \forall n \geq 1$$
con S_0 costante reale positiva. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}^*$:

1. S_n è una variabile aleatoria $\mathcal{F}_n$-misurabile;

2. S_n e X_{n+1} sono indipendenti;
3. $\mathcal{F}_n = \sigma(S_m | m \le n)$.

Definiamo poi $\tau := \inf\{n \mid X_n = u\}$.

4. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, l'evento $\{\tau \ge n\}$ è indipendente da X_n.
5. Che legge ha τ?

Esercizio 5. Su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ siano assegnati un processo di Bernoulli $(X_i)_i$ di parametro $p \in (0,1)$ e una variabile aleatoria $N \sim Po(\lambda)$, $\lambda > 0$, che siano indipendenti. Si ponga

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$$

(per convenzione ricordiamo che $S_0 \equiv 0$) e si denoti con S_N la variabile aleatoria che, per ciascun intero $n \in \mathbb{N}$, coincide con S_n sull'evento $\{N = n\}$; in altre parole, S_N è definita come funzione su Ω come $(S_N)(\omega) := (S_{N(\omega)})(\omega)$.

1. Calcolare la legge di S_N;
2. Calcolare la legge di $N - S_N$;
3. Dimostrare che S_N e $N - S_N$ sono indipendenti.

Esercizio 6. Consideriamo una variabile aleatoria $X \in L^+(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ di legge μ, e poniamo

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le x\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x\}.$$

Calcolando in due modi diversi la misura di questi due eventi rispetto alla misura prodotto $\mu \otimes \lambda_1$, dove λ_1 è la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}$, dimostrare le seguenti formule:

1. $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbb{P}\{X \ge t\}\, dt$,
2. $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbb{P}\{X > t\}\, dt = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(t))\, dt$.
3. Se X è a valori in $\mathbb{N}$, dimostrare che $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\{X > n\}$.

Soluzioni su `http://www.math.unipd.it/~vargiolu/CalPro/`

Soluzioni

Esercizio 1.

1. Per vedere se le variabili aleatorie sono indipendenti, usiamo la caratterizzazione in termini di densità congiunta e densità marginali. Le densità marginali di X e Y sono rispettivamente

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\ dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\mathbf{1}_{(-1,1)}(x)\ dy = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}\mathbf{1}_{(-1,1)}(x), \\ f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\ dx = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi}\mathbf{1}_{(-1,1)}(y)\ dx = \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}\mathbf{1}_{(-1,1)}(y) \end{aligned}$$

e quindi $f_{X,Y} \neq f_X f_Y$. Difatti su $[0,1]^2 \setminus G$ si ha che $f_{X,Y} = 0$ quasi certamente e $f_X f_Y > 0$ quasi certamente (ovviamente la misura di riferimento qui è λ_2), quindi non possono essere la stessa funzione in L^1. Questo basta ad affermare che le due componenti non sono indipendenti.

Calcoliamo ora le densità marginali di Z e W:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{\mathbb{R}} f_{Z,W}(z,w)\ dw = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\mathbf{1}_{(0,1)}(z)\ dw = \mathbf{1}_{(0,1)}(z), \\ f_W(w) &= \int_{\mathbb{R}} f_{Z,W}(z,w)\ dz = \int_{0}^{1} \mathbf{1}_{(-1,1)}(w)\ dz = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{(-1,1)}(w) \end{aligned}$$

Qui invece si ha che $f_{X,Y} = f_X f_Y$ λ_2-quasi certamente, quindi questo basta ad affermare che le due variabili aleatorie sono indipendenti.

2. Si ha $(X,Y) = \varphi(R,\theta)$ con $\varphi(r,\theta) := (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Allora

Posto $(X,Y) = \varphi(R,\theta)$ con $\varphi(r,\theta) := (r\cos\theta, r\sin\theta)$, abbiamo che

$$D\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

e quindi $J\varphi(r,\theta) = \det D\varphi(r,\theta) = r \neq 0$ per ogni $r \neq 0$, quindi φ è un diffeomorfismo di classe C^1 da $(0,1)\times(0,2\pi)$ su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Inoltre $r^2 = \sqrt{x^2+y^2}$. Allora la formula di cambiamento di variabili applicata alle densità dà

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x,y) &= f_{r,\theta}(\varphi^{-1}(x,y))|\det J\varphi^{-1}(x,y)| = \\ &= \mathbf{1}_{(0,1)\times(0,2\pi)}(\varphi^{-1}(x,y))\ \frac{1}{|\det J\varphi(r,\theta)|}\Big|_{(r,\theta)=\varphi^{-1}(x,y)} = \\ &= \frac{1}{r}\Big|_{(r,\theta)=\varphi^{-1}(x,y)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

e con questa densità chiaramente (X,Y) non ha densità uniforme sul cerchio unitario.

Esercizio 2.

1. Il triangolo equilatero di lato X ha area $\frac{\sqrt{3}}{4}X^2$, quindi la probabilità cercata è uguale a
$$\mathbb{P}\left\{\frac{\sqrt{3}}{4}X^2 > 1\right\} = \mathbb{P}\left\{X > \frac{2}{\sqrt[4]{3}}\right\} = 1 - F_X\left(\frac{2}{\sqrt[4]{3}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt[4]{3}} = 0.240164$$

2. Calcoliamo
$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\ dy = \int_0^{1-x} \frac{1}{2}\mathbf{1}_{(0,1)}(x)dy = \frac{1-x}{2}\mathbf{1}_{(0,1)}(x), \\ f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\ dx = \int_0^{1-y} \frac{1}{2}\mathbf{1}_{(0,1)}(y)dx = \frac{1-y}{2}\mathbf{1}_{(0,1)}(y), \end{aligned}$$

Esercizio 3. Posto $(Z,W) := \varphi(X,Y) := (\sqrt{-2\log X}\cos(2\pi Y), \sqrt{-2\log X}\sin(2\pi Y))$, abbiamo che
$$J\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x}(-2\log x)^{-1/2}\cos 2\pi y & -2\pi(-2\log x)^{1/2}\sin 2\pi y \\ \\ -\frac{1}{x}(-2\log x)^{-1/2}\sin 2\pi y & 2\pi(-2\log x)^{1/2}\cos 2\pi y \end{pmatrix}$$
e quindi $\det J\varphi(x,y) = -\frac{2\pi}{x} \neq 0$ per ogni $x \neq 0$, quindi φ è un diffeomorfismo di classe C^1 da $(0,1)^2$ su $\mathbb{R}^2 \setminus ([0,+\infty) \times \{0\})$. Inoltre abbiamo che $z^2 + w^2 = -2\log x$, e quindi $x = e^{-\frac{z^2+w^2}{2}}$, e infine la formula di cambiamento di variabili applicata alle densità dà
$$\begin{aligned} f_{Z,W}(z,w) &= f_{X,Y}(\varphi^{-1}(z,w))|\det J\varphi^{-1}(z,w)| = \\ &= \mathbf{1}_{(0,1)^2}(\varphi^{-1}(z,w))\ \frac{1}{|\det J\varphi(x,y)|}\bigg|_{(x,y)=\varphi^{-1}(z,w)} = \\ &= \mathbf{1}_{(0,1)^2}(\varphi^{-1}(z,w))\ \frac{x}{2\pi}\bigg|_{(x,y)=\varphi^{-1}(z,w)} = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{z^2+w^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}w^2} \end{aligned}$$
e quindi le due variabili aleatorie sono indipendenti e di legge $N(0,1)$.

Esercizio 4.

1. S_n è funzione deterministica di $X_1,\dots,X_n$, e queste variabili aleatorie sono funzioni $\mathcal{F}_n$-misurabili per definizione di $\mathcal{F}_n$. Allora S_n è la composizione del vettore di funzioni $\mathcal{F}_n$-misurabili $(X_1,\dots,X_n)$ per una funzione misurabile (in questo caso, il prodotto) da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$, e quindi è anch'essa $\mathcal{F}_n$-misurabile.

2. $\mathcal{F}_n$ è generata dagli insiemi della forma $\{X_i \in B\}$, con $i = 1,\dots,n$ e $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, che sono una sua base. Questi insiemi sono indipendenti dagli insiemi della forma $\{X_{n+1} \in B\}$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, che, coincidendo con $\sigma(X_{n+1})$, sono banalmente una sua base; quindi si ha la tesi dal criterio di indipendenza fondato su due basi.

3. Siccome si ha che per ogni n, $X_n = S_n/S_{n-1}$, con un ragionamento analogo a quello del punto 1), si ha che X_i è $\sigma(S_m|m \leq n)$-misurabile per ogni $i = 1,\dots,n$. Questo significa che gli eventi della forma $\{X_i \in B\} \in \sigma(S_m|m \leq n)$ per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ma questi eventi generano $\mathcal{F}_n$, quindi si ha che $\mathcal{F}_n \subseteq \sigma(S_m|m \leq n)$. Inoltre, per il punto 1) si ha che $\sigma(S_m|m \leq n) \subseteq \mathcal{F}_n$, e quindi segue la tesi.

4. Possiamo scrivere $\{\tau \geq n\} = \{\tau > n-1\} = \{X_1 = \ldots = X_{n-1} = d\}$. Dato che le $(X_n)_n$ sono indipendenti, da questo segue la tesi.

5. Abbiamo $\mathbb{P}\{\tau \geq n\} = (1-p)^{n-1}$, quindi $\mathbb{P}\{\tau = n\} = \mathbb{P}\{\tau \geq n\} - \mathbb{P}\{\tau \geq n+1\} = (1-p)^{n-1} - (1-p)^n = p(1-p)^{n-1}$, e quindi $\tau \sim Ge(p)$.

Esercizio 5. Si può dare subito la risposta a tutte e 3 le domande semplicemente calcolando la legge congiunta di $(S_N, N-S_N)$. Dato che entrambe le variabili aleatorie assumono valori in $\mathbb{N}$, per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{S_N = k, N - S_N = n\} &= \mathbb{P}\{S_N = k, N = n+k\} = \mathbb{P}\{S_{n+k} = k, N = n+k\} = \\
&= \mathbb{P}\{S_{n+k} = k\}\mathbb{P}\{N = n+k\} = \\
&= \binom{n+k}{k} p^k (1-p)^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n+k}}{(n+k)!} = \\
&= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^n}{n!}
\end{aligned}$$

Questo prova contemporaneamente che $S_N \sim Po(\lambda p)$, $N - S_N \sim Po(\lambda(1-p))$ e che le due variabili aleatorie sono indipendenti.

Esercizio 6. Innanzitutto avremo che $(\mu \otimes \lambda_1)(A) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_A \, d\mu \otimes \lambda_1$ e $(\mu \otimes \lambda_1)(B) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_B \, d\mu \otimes \lambda_1$, quindi, siccome $\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B \in L^+(\mu \otimes \lambda_1)$, per i primi due punti possiamo applicare automaticamente il teorema di Tonelli.

1. Abbiamo

$$\begin{aligned}
(\mu \otimes \lambda_1)(A) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A \, d\mu(x) \, d\lambda_1(y) = \int_{[0,+\infty)} \int_{[y,+\infty)} d\mu(x) \, d\lambda_1(y) = \\
&= \int_{[0,+\infty)} \mu([y,+\infty)) \, d\lambda_1(y) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\{X \geq y\} \, dy
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(\mu \otimes \lambda_1)(A) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_A \, d\lambda_1(y) \, d\mu(x) = \int_{[0,+\infty)} \int_{[0,x]} d\lambda_1(y) \, d\mu(x) = \\
&= \int_{[0,+\infty)} \lambda_1([0,x]) \, d\mu(x) = \int_{[0,+\infty)} x \, d\mu(x)
\end{aligned}$$

Siccome $X \in L^+$, allora μ è concentrata su $\mathbb{R}^+$ e quindi la quantità sopra coincide con $\mathbb{E}[X]$, quindi si ha

$$\mathbb{E}[X] = (\mu \otimes \lambda_1)(A) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\{X \geq y\} \, dy$$

2. Si procede in modo analogo rimpiazzando B ad A.

3. In questo caso la funzione $y \to \mathbb{P}\{X > y\} = 1 - F_X(y)$ è costante su ogni intervallo della forma $[n, n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, e quindi

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(y)\mathbb{P}\{X > y\}\ dy = \int \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[n,n+1)}(y)\mathbb{P}\{X > y\}\ dy = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int \mathbf{1}_{[n,n+1)}(y)\mathbb{P}\{X > y\}\ dy = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[n,n+1)} \mathbb{P}\{X > y\}\ dy = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{X > n\}
\end{aligned}
$$