**Esercizi di Calcolo delle Probabilità della $5^a$ settimana (Corso di Laurea in Matematica, Università degli Studi di Padova).**

**Esercizio 1.** Siano $(X_n)_n$ i.i.d. di Bernoulli di parametro $p$ e definiamo per ogni $N \geq 1$ le due variabili aleatorie

$$S_N := \sum_{n=1}^{N} X_n, \qquad \tau_N := \min\{n \mid S_n = N\}$$

Fissato $N \geq 1$, dimostrare che

1. per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\{\tau_N \leq n\} = \{S_n \geq N\}$
2. Dando per noto che $\tau_N$ è quasi certamente finito, calcolare $E[\tau_N]$ (suggerimento: usare l'identità di Wald).
3. Calcolare la legge di $\tau_1$.

**Esercizio 2.** Una compagnia di vendite telefoniche tenta ripetutamente di vendere cucine ad ognuna delle $N$ famiglie di un villaggio, dove $N \sim Po(\lambda)$. La famiglia $i$ accetta di comprare una nuova cucina dopo che è stata sollecitata $K_i$ volte, dove le $(K_i)_{i=1,\dots,N}$ sono i.i.d., indipendenti da $N$ e di densità discreta $f(n) = \mathbb{P}\{K_i = n\}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo $X_n := \sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{K_i=n}$ il numero di cucine vendute all'$n$-esimo giro di sollecitazioni.

1. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ la variabile aleatoria $X_n$ è di Poisson di parametro $\lambda f(n)$.
2. La compagnia abbandona al $T$-esimo giro di sollecitazioni, dove $T := \inf\{n | X_n = 0\}$. Sia $S_T := X_1 + \ldots + X_T$ il numero di cucine vendute fino a $T$. Supponendo di aver dimostrato che le $X_n, n \geq 1$ sono indipendenti, dimostrare che $\mathbb{E}[S_T] = \lambda\mathbb{E}[F(T)]$, dove $F(k) := f(1) + \ldots + f(k)$ è la funzione di ripartizione delle $(K_i)_{i=1,\dots,N}$.

**Esercizio 3.** Consideriamo una successione di variabili aleatorie $(X_n)_n$ a valori in $[-1, 1]$ e tale che:

- $X_0 = 0$ q.c.
- per ogni $n \in \mathbb{N}$, la legge condizionale di $X_{n+1}$ rispetto a $X_0, \dots, X_n$ è la legge uniforme sul più grande intervallo di centro $X_n$ contenuto in $[-1, 1]$; in altre parole, una versione della legge condizionale di $X_{n+1}$ rispetto a $\mathcal{F}_n^X$ (o equivalentemente rispetto a $X_n$) è la famiglia $(U(x - a(x), x + a(x)))_{x\in(-1,1)}$, dove $a(x) := 1 - |x|$.

Dimostrare che:

a) $E[X_{n+1}|(X_0, \dots, X_n)] = X_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

b) Dando per noto che $X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} X_\infty$ tale che $|X_\infty| \leq 1$, dedurne che $\mathbb{E}[X_\infty] = 0$.

c) $\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2] = \mathbb{E}[\frac{(1-|X_n|)^2}{3}]$ (suggerimento: condizionare rispetto a $X_n$).

d) Usando il punto precedente e facendo il limite per $n \to \infty$, dedurne che $|X_\infty| = 1$ q.c.

e) Usando i punti $d$) e $b$), dedurne la legge di $X_\infty$.

**Esercizio 4.** Dando per noto che per ogni $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\frac{d}{dx} e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x}$ e che $\int e^{\alpha x}\, dx = e^{\alpha x}/\alpha + c$, calcolare la funzione caratteristica $\varphi_X$, dove $X$ è una variabile aleatoria:

1. di Poisson: $X \sim Po(\lambda)$, con $\lambda > 0$;
2. uniforme: $X \sim U(a, b)$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$;
3. esponenziale: $X \sim Exp(\lambda)$, con $\lambda > 0$;
4. Gamma: $X \sim \Gamma(a, \lambda)$, con $a \in \mathbb{Q}^+$, $\lambda > 0$;

(suggerimento per il punto 4): per ogni $m/n \in \mathbb{Q}^+$, considerare prima una legge $\Gamma(m, \lambda)$ come somma di $m$ leggi $Exp(\lambda)$ indipendenti, e poi la stessa legge $\Gamma(m, \lambda)$ come somma di $n$ leggi $\Gamma(m/n, \lambda)$ indipendenti, che sono distribuite come $X$)

**Esercizio 5.** Una legge reale $X$ si dice *infinitamente divisibile* se, per ogni intero positivo $n$, esistono variabili aleatorie $(Y_i^{(n)})_{i=1,\dots,n}$ i.i.d. e tali che $\sum_{i=1}^n Y_i^{(n)}$ ha la stessa distribuzione di $X$. Mostrare che le seguenti distribuzioni sono infinitamente divisibili:

a) normale;

b) Poisson;

c) Gamma;

(suggerimento: usare le funzioni caratteristiche)

**Esercizio 6.** Se $X \sim N(0, 1)$, calcolare $\mathbb{E}[X^n]$ per ogni $n \geq 1$.
(suggerimento: prendere per noto che se $\mathbb{E}[|X|^n] < +\infty$, allora $\varphi_X \in C^n$ e $\varphi_X^{(n)}(t) = \mathbb{E}[(iX)^n e^{itX}]$).

**Soluzioni su** `http://www.math.unipd.it/~vargiolu/CalPro/`

**Soluzioni**

## Esercizio 1.

1. Innanzitutto notiamo che $(S_n)_n$ è una successione q.c. non decrescente.Poichè $S_0 \equiv 0$, si ha
$$\{\tau_N > n\} = \{S_1 < N, \dots, S_n < N\} = \{S_n < N\}$$
quindi $\{\tau_N \le n\} = \{S_n \ge N\}$.

2. Per usare l'identità di Wald, bisogna avere che $X_{n+1}$ è indipendente da $\{\tau_N > n\}$ per ogni $n$; in effetti, $\{\tau_N > n\} = \{S_n < N\}$ è indipendente da $X_{n+1}$; siccome poi $S_{\tau_N} \equiv N$ q.c., si ha:
$$\mathbb{E}[S_{\tau_N}] = N = \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} X_{n+1}\mathbf{1}_{\{\tau_N > n\}}\right] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[\tau_N] = p\mathbb{E}[\tau_N]$$
quindi $\mathbb{E}[\tau_N] = \frac{N}{p}$.

3. Siccome
$$\tau_1 = \min\left\{n \mid \sum_{i=1}^{n} X_i = 1\right\} = \min\{n \mid X_n = 1\}$$
possiamo concludere che $\tau_1$ ha legge geometrica di parametro $p$. Questo si può anche ricavare dal punto a), poichè
$$\mathbb{P}\{\tau_1 \le n\} = \mathbb{P}\{S_n \ge 1\} = 1 - \mathbb{P}\{S_n = 0\} = 1 - (1-p)^n$$
che è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria geometrica.

## Esercizio 2.

1. La legge di $X_n$ dipende dalla variabile aleatoria $N$; in particolare, condizionatamente all'evento $\{N = i\}$, $X_n$ ha legge $B(i, f(n))$. Se chiamiamo $\mathbb{Q}_i = \mathbb{P}(\cdot \mid \{N = i\})$, per la formula della disintegrazione si ha
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{X_n = k\} &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}_i\{X_n = k\}\mathbb{P}\{N = i\} = \sum_{i\ge k} \binom{i}{k} f(n)^k (1-f(n))^{i-k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} = \\
&= \frac{(\lambda f(n))^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{i\ge k} \frac{(\lambda(1-f(n))^{i-k}}{(i-k)!} = \frac{(\lambda f(n))^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{i\ge 0} \frac{(\lambda(1-f(n))^{i}}{i!} = \\
&= \frac{(\lambda f(n))^k}{k!} e^{-\lambda} e^{\lambda(1-f(n))} = e^{-\lambda f(n)} \frac{(\lambda f(n))^k}{k!}
\end{aligned}$$

2. Ragionando come nella dimostrazione dell'identità di Wald, e tenendo presente che se le $(X_n)_n$ sono indipendenti allora l'evento $\{T \ge n\} = \{X_1 > 0, \dots, X_{n-1} > 0\}$ è

indipendente da $X_n$, si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_T] &= \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{T} X_n\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty} X_n \mathbf{1}_{\{T\geq n\}}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_n]\mathbb{P}\{T \geq n\} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda f(n) \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}\{T = k\} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\{T = k\} \sum_{n=1}^{k} f(n) = \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\{T = k\} F(k) = \lambda \mathbb{E}[F(T)]\end{aligned}$$

**Esercizio 3.**

a) Per la formula che lega legge condizionale e speranza condizionale, si ha che $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1} \mid X_n] = \varphi(X_n)$, dove $\varphi(x) := \int_{\mathbb{R}} y \, d\nu_x(y)$, con $\nu_x = U(x-a(x), x+a(x))$. Allora, ricordando il valor medio di una legge uniforme o facendo i calcoli a mano, si ha che

$$\varphi(x) = \int_{x-a(x)}^{x+a(x)} y \frac{dy}{2a(x)} = \ldots = x$$

e questo implica la tesi.

b) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $|X_n| \leq 1$, quindi $X$ è una martingala limitata in $L^1$, e quindi esiste $X_\infty$ tale che $X_n \to X_\infty$ q.c.; inoltre si ha che $|X| \leq 1$. Dato che $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_0] = 0$, per il teorema della convergenza dominata si ha che $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} X_n] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = 0$.

c) Come nel punto $a$), per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che

$$\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[(X_{n+1} - X_n)^2 \mid X_n]] = \tilde{\varphi}(X_n)$$

dove $\tilde{\varphi}(x) := \int_{\mathbb{R}} (y - x)^2 \, d\nu_x(y)$. Allora, ricordando la varianza di una legge uniforme o facendo i calcoli a mano, si ha che

$$\tilde{\varphi}(x) = \int_{x-a(x)}^{x+a(x)} (y - x)^2 \frac{dy}{2a(x)} = \ldots = \frac{a(x)^2}{3} = \frac{(1 - |x|)^2}{3}$$

d) Calcoliamo il limite per $n \to \infty$ in entrambi i membri. Al primo membro si ha che $(X_{n+1} - X_n)^2 \leq 4 \in L^1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e $(X_{n+1} - X_n)^2 \to (X_\infty - X_\infty)^2 = 0$ q.c.; al secondo membro si ha che $(1 - |X_n|)^2/3 \leq 1/3 \in L^1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e $(1 - |X_n|)^2/3 \to (1 - |X_\infty|)^2/3$ q.c. Considerando gli integrali, il teorema della convergenza dominata ci dà

$$\mathbb{E}[0] = 0 = \mathbb{E}\left[\frac{(1 - |X_\infty|)^2}{3}\right]$$

Dato che $(1 - |X_\infty|)^2$ è q.c. positiva, questo implica che è q.c. nulla, cioè che $|X_\infty| = 1$ q.c.

e) Dato che $|X_\infty| = \pm 1$ q.c. e che $\mathbb{E}[X_\infty] = 0$, non può succedere altro che $\mathbb{P}\{X_\infty = 1\} = \mathbb{P}\{X_\infty = -1\} = 1/2$.

**Esercizio 4.**

1. $$\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{itn} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^n}{n!} = \exp\big(\lambda(e^{it} - 1)\big)$$

2. $$\varphi_X(t) = \int_a^b \frac{e^{itx}}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \left[ \frac{e^{itx}}{it} \right]_a^b = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

3. $$\varphi_X(t) = \int_0^{+\infty} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \frac{\lambda}{it - \lambda} [e^{(it-\lambda)x}]_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

4. Se $a \in \mathbb{Q}^+$, allora esistono $m, n \in \mathbb{N}$ tali che $a = m/n$. Per ogni $m \in \mathbb{N}$, una variabile aleatoria di legge $\Gamma(m, \lambda)$ ha la stessa legge della somma di $m$ variabili aleatorie indipendenti di legge $Exp(\lambda)$, quindi ha funzione caratteristica $\varphi_X(t) = (\frac{\lambda}{\lambda - it})^m$. Se ora consideriamo $n$ variabili aleatorie $X_1, \dots, X_n$ indipendenti e di legge $\Gamma(m/n, \lambda)$, allora la loro somma ha legge $\Gamma(m, \lambda)$, e quindi si ha:
$$\left( \frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^m = \varphi_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(t) = \varphi_{X_1}^n(t)$$
e quindi $\varphi_{X_1}(t) = (\frac{\lambda}{\lambda - it})^{m/n} = (\frac{\lambda}{\lambda - it})^a$.

**Esercizio 5.** Dato che la funzione caratteristica caratterizza la legge di una variabile aleatoria, $X$ è infinitamente divisibile se e solo se per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ si ha $\varphi_X = \varphi_Y^n$ per qualche variabile aleatoria $Y$, cioè se e solo se $\sqrt[n]{\varphi_X}$ è la funzione caratteristica di una qualche variabile aleatoria $Y$.

a) se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, allora $\sqrt[n]{\varphi_X(t)} = \sqrt[n]{e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}} = e^{i\frac{\mu}{n}t - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}t^2}$ è la funzione caratteristica di una variabile aleatoria $N(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma^2}{n})$.

b) se $X \sim Po(\lambda)$, allora $\sqrt[n]{\varphi_X(t)} = \sqrt[n]{e^{\lambda(e^{it}-1)}} = e^{\frac{\lambda}{n}(e^{it}-1)}$ è la funzione caratteristica di una variabile aleatoria $Po(\frac{\lambda}{n})$.

c) se $X \sim \Gamma(a, b)$, allora $\sqrt[n]{\varphi_X(t)} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{1-bt}\right)^a} = \left(\frac{1}{1-bt}\right)^{a/n}$ è la funzione caratteristica di una variabile aleatoria $\Gamma(\frac{a}{n}, b)$.

**Esercizio 6.** Premettiamo che $X^n \in L^1$ per ogni $n \geq 1$: difatti,

$$\mathbb{E}[|X|^n] = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} |x|^n e^{-\frac{1}{2}x^2} \, dx < +\infty$$

poichè l'integrando è prodotto di un polinomio per una funzione che decade più velocemente di un esponenziale. Quindi $\varphi_X \in C^\infty$.
Dato che $\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$, abbiamo che $\varphi_X$ non solo è $C^\infty$, ma anche analitica, e si ha quindi:

$$\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{t^2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n n!}$$

Sfruttando il suggerimento e facendo lo sviluppo di Taylor di $\varphi_X$ nel punto 0, abbiamo che

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(0) t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbb{E}[(iX)^k] t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \mathbb{E}[X^k] t^k$$

Le due serie devono allora essere uguali membro a membro. Abbiamo subito che per $k$ dispari, deve essere $\mathbb{E}[X^k] = 0$ (si arriva facilmente alla stessa conclusione notando che la densità della gaussiana è una funzione pari). Abbiamo quindi:

$$\varphi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n}}{(2n)!} \mathbb{E}[X^{2n}] t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \mathbb{E}[X^{2n}] t^{2n}$$

Bisogna quindi avere per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{(-1)^n}{2^n n!} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \mathbb{E}[X^{2n}]$$

e quindi

$$\mathbb{E}[X^{2n}] = \frac{(2n)!}{2^n n!} = (2n-1)(2n-3) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 1$$