Esercizi di Calcolo delle Probabilità della 6^a settimana (Corso di Laurea in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Esercizio 1. Siano $X, (X_n)_n, Y, (Y_n)_n$ variabili aleatorie reali e $a, b \in \mathbb{R}$. Dimostrare che:

1. se $X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} X$ e $Y_n \xrightarrow{\text{q.c.}} Y$, allora $aX_n + bY_n \xrightarrow{\text{q.c.}} aX + bY$
2. se $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ e $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$, allora $aX_n + bY_n \xrightarrow{\mathbb{P}} aX + bY$
3. se $X_n \xrightarrow{L^p} X$ e $Y_n \xrightarrow{L^p} Y$ per $p \geq 1$, allora $aX_n + bY_n \xrightarrow{L^p} aX + bY$
4. se $X_n \rightharpoonup X$ e $Y_n \rightharpoonup Y$ e per ogni $n \geq 1$ le variabili aleatorie X_n e Y_n sono indipendenti, allora $aX_n + bY_n \rightharpoonup aX + bY$

Esercizio 2. Siano $(X_n)_n$ una successione di variabili aleatorie reali e $g \in C(\mathbb{R})$.

1. Se $X_n \xrightarrow{\text{q.c.}} X$, allora $g(X_n) \xrightarrow{\text{q.c.}} g(X)$.
2. Se g è uniformemente continua su $\mathbb{R}$ e $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, allora $g(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(X)$.

Esercizio 3. Siano $(X_n)_{n\geq 2}$ variabili aleatorie indipendenti tali che

$$\mathbb{P}\{X_n = n\} = \mathbb{P}\{X_n = -n\} = \frac{1}{2n \log n}, \quad \mathbb{P}\{X_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n \log n}$$

a) Mostrare che $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

b) Determinare per quali $p \geq 1$ si ha $X_n \xrightarrow{L^p} 0$.

Esercizio 4. Sia $(X_n)_n$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. $\sim Be(\frac{1}{2})$ e definiamo

$$Y_n := \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} X_k$$

1. Dimostrare che $Y_n \xrightarrow{\text{q.c.}} Y := \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} X_k$.
2. Dimostrare che
$$\varphi_{Y_n}(t) = \frac{1}{2^n} \frac{e^{it} - 1}{e^{it/2^n} - 1}$$
3. Dedurne che $Y_n \rightharpoonup U(0; 1)$, e che quindi $Y \sim U(0; 1)$.

Esercizio 5. Siano $(X_n)_n$ i.i.d. di legge $U(0, 1)$, e poniamo $M_n := \max(X_1, \ldots, X_n)$. Dimostrare che $n(1 - M_n) \rightharpoonup Exp(1)$.
(suggerimento: usare una caratterizzazione della convergenza in legge)

Esercizio 6. Siano $(X_n)_n$ i.i.d. aventi densità rispetto alla misura di Lebesgue $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ (le X_n si dicono allora avere **legge di Cauchy**), e definiamo

$$M_n := \frac{\pi}{n} \max(X_1, \ldots, X_n)$$

1. Qual è la funzione di ripartizione di X_n?
2. Calcolare la funzione di ripartizione di M_n.
3. Dimostrare che $(M_n)_n$ converge in legge verso una distribuzione avente funzione di ripartizione $H(x) = e^{-1/x}\mathbf{1}_{\{x>0\}}$.

Suggerimento: ricordarsi che $\operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ per ogni $x > 0$.

Soluzioni su `http://www.math.unipd.it/~vargiolu/CalPro/`

Soluzioni

Esercizio 1.

1. Chiamiamo $A := \{\lim_n X_n = X\}$ e $B := \{\lim_n Y_n = Y\}$. Allora $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1$, e si vede facilmente che $\mathbb{P}(A \cap B) = 1$. Ma su $A \cap B$ si ha che $\lim_n aX_n + bY_n = aX + bY$, quindi $\mathbb{P}\{\lim_n aX_n + bY_n = aX + bY\} \geq \mathbb{P}(A \cap B) = 1$ e si ha la tesi.

2. Abbiamo che $|a(X_n - X) + b(Y_n - Y)| \leq |a||X_n - X| + |b||Y_n - Y|$; inoltre se $|a(X_n - X) + b(Y_n - Y)| > \delta$, allora deve essere vero che $|a(X_n - X)| > \delta/2$ oppure che $|b(Y_n - Y)| > \delta/2$ (se infatti entrambe le relazioni fossero false, non potremmo avere $|a(X_n - X) + b(Y_n - Y)| > \delta$). Allora

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{|a(X_n - X) &+ b(Y_n - Y)| > \delta\} \leq \mathbb{P}\{|a||X_n - X| + |b||Y_n - Y| > \delta\} \leq \\
&\leq \mathbb{P}\{|a||X_n - X| > \delta/2\} + \mathbb{P}\{|b||Y_n - Y| > \delta/2\} = \\
&= \mathbb{P}\left\{|X_n - X| > \frac{\delta}{2|a|}\right\} + \mathbb{P}\left\{|Y_n - Y| > \frac{\delta}{2|b|}\right\} \to 0
\end{aligned}$$

3. Poichè $\|\cdot\|_p$ è una norma, allora $\|a(X_n - X) + b(Y_n - Y)\|_p \leq |a|\|X_n - X\|_p + |b|\|Y_n - Y\|_p$, e segue la tesi.

4. Per il teorema di Paul Levy, per ogni $t \in \mathbb{R}$ abbiamo $\varphi_{X_n}(t) \to \varphi_X(t)$ e $\varphi_{Y_n}(t) \to \varphi_Y(t)$. Allora

$$\varphi_{aX_n + bY_n}(t) = \varphi_{aX_n}(t)\varphi_{bY_n}(t) = \varphi_{X_n}(at)\varphi_{Y_n}(bt) \to \varphi_X(at)\varphi_Y(bt) = \varphi_{aX}(t)\varphi_{bY}(t)$$

   Questo significa che $(aX_n + bY_n)_n$ converge in legge alla somma di due variabili aleatorie indipendenti $a\bar{X} + b\bar{Y}$, dove $\bar{X} \sim X$ e $\bar{Y} \sim Y$.

Da questo esercizio risulta che nelle prime 3 convergenze possiamo dire che $X_n \to X \iff X_n - X \to 0$, dove $\to$ è la convergenza quasi certa, in probabilità o in L^p. Lo stesso non si può dire della convergenza in legge, poichè dovremmo richiedere che X sia indipendente da se stessa, che è vero solo se X è degenere.

Esercizio 2.

1. Poichè se $g \in C_b(\mathbb{R})$ e $x_n \to x$, allora $g(x_n) \to g(x)$, abbiamo che $\mathbb{P}\{\lim_n g(X_n) = g(X)\} \geq \mathbb{P}\{\lim_n X_n = X\} = 1$.

2. Se g è uniformemente continua su $\mathbb{R}$, significa che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|x - y| < \delta$ implica $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$. Allora

$$\mathbb{P}\{|g(X_n) - g(X)| \geq \varepsilon\} \leq \mathbb{P}\{|X_n - X| \geq \delta\} \to 0$$

   per $n \to \infty$, quindi $g(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} g(X)$.

Esercizio 3.

a) Fissato $\delta > 0$, per ogni $n > \delta$ si ha:

$$\mathbb{P}\{|X_n| > \delta\} = \mathbb{P}\{|X_n| = n\} = \mathbb{P}\{X_n = \pm n\} = \frac{1}{2n\log n} + \frac{1}{2n\log n} = \frac{1}{n\log n} \to 0$$

b) Per ogni $n \geq 2$ si ha

$$\mathbb{E}[|X_n - 0|^p] = \frac{n^p}{2n\log n} + \frac{|-n|^p}{2n\log n} = \frac{n^{p-1}}{\log n}$$

che tende a 0 se e solo se $p = 1$, quindi si ha che $X_n \xrightarrow{L^1} 0$ ma $X_n \overset{L^p}{\nrightarrow} 0$ per ogni $p > 1$.

Esercizio 4.

1. Per ogni $k \geq 1$, $2^{-k}X_k \in L^+ \cap L^1$, quindi si può usare uno qualsiasi dei due teoremi di integrazione per serie. In particolare, si ha che $\sum_{k=1}^\infty \|2^{-k}X_k\|_{L^1} = \sum_{k=1}^\infty 2^{-k} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < +\infty$, quindi $Y = \sum_{k=1}^\infty 2^{-k}X_k$ è ben definita ed appartiene a L^1, e si ha $Y_n \xrightarrow{\text{q.c.}} Y$.
2. Per ogni $n \geq 1$ e $t \in \mathbb{R}^*$ abbiamo
$$\varphi_{Y_n}(t) = \varphi_{\sum_{k=1}^n 2^{-k}X_k}(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}\left(\frac{t}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{2}(e^{\frac{it}{2^k}} + 1) = \frac{1}{2^n}\frac{e^{it}-1}{e^{it/2^n}-1}$$
mentre invece se $t = 0$ abbiamo identicamente $\varphi_{Y_n}(t) = 1$.
3. Basta applicare il teorema di Paul Levy: chiaramente abbiamo che $\varphi_{Y_n}(0) = 1 \to 1$, mentre per ogni $t \in \mathbb{R}^*$ abbiamo
$$\varphi_{Y_n}(t) = \frac{1}{2^n}\frac{e^{it}-1}{e^{it/2^n}-1} = \frac{e^{it}-1}{2^n(1 + \frac{it}{2^n} + o(\frac{1}{2^n}) - 1)} = \frac{e^{it}-1}{it + o(1)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{e^{it}-1}{it}$$
che è la funzione caratteristica di una legge $U(0,1)$. Siccome dal punto 1 abbiamo anche che $Y_n \xrightarrow{\text{q.c.}} Y$, che implica $Y_n \rightharpoonup Y$, per l'unicità del limite in legge abbiamo che $Y \sim U(0,1)$.

Esercizio 5. Ricordiamo che $Y_n \rightharpoonup Y$ se e solo se $F_{Y_n}(t) \to F_Y(t)$ per ogni t in cui F_Y è continua. Per ogni $t < 0$, abbiamo che $\mathbb{P}\{n(1-M_n) > t\} = 1$, mentre per ogni $t \in [0,n)$ abbiamo che

$$\mathbb{P}\{n(1-M_n) > t\} = \mathbb{P}\left\{1 - M_n > \frac{t}{n}\right\} = \mathbb{P}\left\{M_n < 1 - \frac{t}{n}\right\} = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

Al tendere di $n \to \infty$, abbiamo quindi che $\mathbb{P}\{n(1-M_n) > t\} \to e^{-t}$ per ogni $t \geq 0$, quindi $F_{n(1-M_n)}(t) = \mathbb{P}\{n(1-M_n) \leq t\} \to 1 - e^{-t}$, mentre $F_{n(1-M_n)}(t) = 0 \to 0$ per $t < 0$. Dato che la funzione $\mathbf{1}_{t\geq 0}(1-e^{-t})$ è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria di legge $Exp(1)$, abbiamo la tesi.

Esercizio 6.

1. Per ogni $t \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$F_{X_n}(t) = \mathbb{P}\{X_n \leq t\} = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\pi(1+x^2)}\, dx = \left[\frac{1}{\pi}\text{arctg } x\right]_{-\infty}^{t} = \frac{1}{\pi}\text{arctg } t + \frac{1}{2}$$

2. Per ogni $t \in \mathbb{R}$, abbiamo

$$\begin{aligned} F_{M_n}(t) &= \mathbb{P}\{M_n \leq t\} = \mathbb{P}\left\{X_i \leq \frac{tn}{\pi} \quad \forall i = 1, \dots, n\right\} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left\{X_i \leq \frac{tn}{\pi}\right\} = \\ &= F_{X_n}(t)^n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{arctg } \frac{tn}{\pi}\right)^n \end{aligned}$$

3. Per un criterio visto a lezione, basta dimostrare che le funzioni di ripartizione convergono puntualmente. Per ogni $t > 0$ fissato, si ha che $\frac{\pi}{tn} \to 0$ per $n \to \infty$, quindi

$$F_{M_n}(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\text{arctg } \frac{tn}{\pi}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{\pi}\text{arctg } \frac{\pi}{tn}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{tn} + o(1/n)\right)^n \to e^{-\frac{1}{t}}$$

per $n \to \infty$. Invece se $t \leq 0$ si ha che

$$F_{M_n}(t) = \left(\frac{1}{\pi}\text{arctg } \frac{tn}{\pi} + \frac{1}{2}\right)^n \leq F_{M_n}(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$$

per $n \to \infty$.