Esercizi di Calcolo delle Probabilità della 8^a settimana (Corso di Laurea in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Esercizio 1. Un vettore aleatorio X a valori in $\mathbb{R}^d$ si dice **gaussiano** se, per ogni $y \in \mathbb{R}^d$, si ha che $\langle y, X\rangle$ è una variabile aleatoria gaussiana.

1. Dimostrare che ogni componente X_i, $i = 1, \dots, d$, è una variabile aleatoria reale di legge $N(m_i, \sigma_{ii})$, dove indichiamo $m = (m_1, \dots, m_d)$ il vettore delle medie di X e $\Sigma = (\sigma_{ij})_{ij}$ la matrice delle covarianze (si indica allora $X \sim N(m, \Sigma)$).
2. Dimostrare che la funzione caratteristica di X è
$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{i\langle t, X\rangle}] = \exp\left(i\langle t, m\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma t, t\rangle\right)$$
3. Se due vettori aleatori gaussiani X e Y sono tali che $m_X = m_Y$ e $\Sigma_X = \Sigma_Y$, allora hanno la stessa legge.

Esercizio 2. Siano date variabili aleatorie indipendenti gaussiane $X_i \sim N(m_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \dots, d$.

1. Dimostrare che il vettore aleatorio $X = (X_1, \dots, X_d)$ è gaussiano, e calcolarne vettore delle medie e matrice delle covarianze.
2. Dimostrare che, se Y è un vettore aleatorio gaussiano con componenti scorrelate, allora le componenti sono indipendenti.

Esercizio 3. Sia $X \sim N(0,1)$.

1. Dimostrare che esiste $a > 0$ tale che $\mathbb{P}\{|X| > a\} = \frac{1}{2}$.
2. Definita
$$Y := X\mathbf{1}_{\{|X|\le a\}} - X\mathbf{1}_{\{|X|>a\}}$$
dimostrare che $Y \sim N(0,1)$.
3. Dimostrare che X e Y non sono indipendenti, ma $\mathrm{Cov}\,(X,Y) = 0$.

ERRATA: il punto 1. è da sostituire con: dimostrare che esiste $a > 0$ tale che $\mathbb{E}[X^2\mathbf{1}_{\{X|>a\}}] = \frac{1}{2}$.

Esercizio 4. Siano $X, Y \sim Ca(1)$ indipendenti.

1. Calcolare la legge di $2X$.
2. Calcolare la legge di $X + Y$.
3. Fornire un controesempio all'affermazione (falsa): *se due variabili aleatorie X e Y sono tali che $\varphi_X\varphi_Y = \varphi_{X+Y}$, allora sono indipendenti.*

NOTA: se $X \sim Ca(a)$, allora ha densità $f_X(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$.

Soluzioni su `http://www.math.unipd.it/~vargiolu/CalPro/`

Soluzioni

Esercizio 1.

1. Basta notare che $X_i = \langle e_i, X\rangle$, con $(e_i)_{i=1,\dots,d}$ componenti della base canonica di $\mathbb{R}^d$. Allora X_i è gaussiano per definizione di vettore aleatorio gaussiano, e si ha $\mathbb{E}[X_i] = m_i$ per definizione di vettore delle medie e $\mathrm{Var}\,[X_i] = \mathrm{Cov}\,(X_i, X_i) = \sigma_{ii}$ per definizione di matrice delle covarianze.

2. Per ogni $t \in \mathbb{R}^d$, la variabile aleatoria $Y := \langle t, X\rangle$ è gaussiana con media e varianza date da
$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^d t_i X_i\right] = \sum_{i=1}^d t_i \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^d t_i m_i = \langle t, m\rangle, \quad \mathrm{Var}\,[Y] = \mathrm{Var}\,[\langle t, X\rangle] = \langle \Sigma t, t\rangle$$
Allora
$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{i\langle t,X\rangle}] = \varphi_Y(1) = e^{i\mathbb{E}[Y]-\frac{1}{2}\mathrm{Var}\,[Y]} = \exp\left(i\langle t, m\rangle - \frac{1}{2}\langle \Sigma t, t\rangle\right)$$

3. Se $m_X = m_Y$ e $\Sigma_X = \Sigma_Y$, allora anche $\varphi_X = \varphi_Y$: siccome la funzione caratteristica caratterizza la legge, allora X e Y hanno la stessa legge.

Esercizio 2.

1. Per ogni $t \in \mathbb{R}^d$, la variabile aleatoria $\langle t, X\rangle$ è gaussiana poichè combinazione lineare di gaussiane indipendenti, e si ha che il vettore delle medie, per sua definizione, è $m := (m_1, \dots, m_d)$ dove ogni m_i è la media di X_i; inoltre per l'indipendenza delle $(X_i)_i$ si ha che la matrice delle covarianze $\Sigma = (\sigma_{ij})_{ij}$ è tale che $\sigma_{ii} = \mathrm{Var}\,[X_i] = \sigma_i$ e $\sigma_{ij} = \mathrm{Cov}\,(X_i, X_j) = 0$ per $i \neq j$, quindi $\Sigma = \mathrm{diag}\,(\sigma_1, \dots, \sigma_d)$.

2. Se $Y \sim N(m_Y, \Sigma_Y)$ ha componenti scorrelate, allora $\Sigma_Y = \mathrm{diag}\,(\sigma_1^2, \dots, \sigma_d^2)$ per opportuni $\sigma_i \geq 0$. Allora Y ha la stessa legge del vettore $X = (X_1, \dots, X_d)$ costruito con $X_i \sim N(m_i, \sigma_i^2)$ indipendenti, dove $(m_1, \dots, m_d) = m_Y$. Siccome le componenti di X sono indipendenti ed X e Y hanno la stessa legge, allora anche le componenti di Y sono indipendenti.

Esercizio 3.

1. Consideriamo la funzione $f(a) := \mathbb{E}[X^2 \mathbf{1}_{\{|X|>a\}}]$. Siccome la famiglia di variabili aleatorie $(X^2\mathbf{1}_{\{|X|>a\}})_a$ è dominata da $X^2 \in L^1$ e $\lim_{a\to\bar{a}} X^2\mathbf{1}_{\{|X|>a\}} = X^2\mathbf{1}_{\{|X|>\bar{a}\}}$ q.c. per ogni $a \geq 0$, abbiamo che $f \in C^0$. Siccome poi $f(0) = 0$ e $\lim_{a\to+\infty} f(a) = \mathbb{E}[X^2] = 1$, esisterà un $\bar{a}$ tale che $f(\bar{a}) = \frac{1}{2}$.

2. Calcoliamo F_Y, distinguendo 3 casi:

   - se $t < -a$, allora
   $$\mathbb{P}\{Y \leq t\} = \mathbb{P}\{-X \leq t\} = \mathbb{P}\{X \leq t\}$$
   dove la seconda uguaglianza segue dalla simmetria di X.

- se $-a \le t \le a$, allora

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{Y \le t\} &= \mathbb{P}\{Y < -a\} + \mathbb{P}\{-a \le Y \le t\} = \mathbb{P}\{-X < -a\} + \mathbb{P}\{-a \le X \le t\} = \\ &= \mathbb{P}\{X < -a\} + \mathbb{P}\{-a \le X \le t\} = \mathbb{P}\{X \le t\}\end{aligned}$$

dove la quarta uguaglianza segue dalla simmetria di X.

- se $t > a$, allora

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{Y \le t\} &= \mathbb{P}\{Y \le a\} + \mathbb{P}\{a < Y \le t\} = \mathbb{P}\{X \le a\} + \mathbb{P}\{a < -X \le t\} = \\ &= \mathbb{P}\{X \le a\} + \mathbb{P}\{a < X \le t\} = \mathbb{P}\{X \le t\}\end{aligned}$$

dove abbiamo ancora usato la simmetria di X.

Quindi abbiamo che $F_Y = F_X$, da cui segue $Y \sim N(0,1)$.

3. Ovviamente $X, Y \in L^2$, e siccome $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 0$, possiamo calcolare

$$\text{Cov}\,(X,Y) = \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X^2\mathbf{1}_{\{|X|\le a\}} - X^2\mathbf{1}_{\{|X|>a\}}] = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X^2\mathbf{1}_{\{|X|>a\}}]$$

Abbiamo allora $\mathbb{E}[X^2\mathbf{1}_{\{|X|>a\}}] = \frac{1}{2}$ per il punto 1., e quindi

$$\text{Cov}\,(X,Y) = 1 - 2\cdot\frac{1}{2} = 0$$

Tuttavia, Y è una funzione deterministica di X e quindi non è indipendente da X. Per averne una prova, coi risultati del punto 2. basta calcolare

$$\mathbb{P}\{Y \le -a, X \le -a\} = \mathbb{P}\{X \le -a\} = \frac{1}{2} \ne \frac{1}{4} = \mathbb{P}\{Y \le -a\}\cdot\mathbb{P}\{X \le -a\}$$

Esercizio 4.

1. È sufficiente calcolare la funzione caratteristica di $2X$: siccome $\varphi_X(t) = e^{-|t|}$, abbiamo

$$\varphi_{2X}(t) = \varphi_X(2t) = e^{-2|t|}$$

e quindi $2X \sim Ca(2)$.

2. È sufficiente calcolare la funzione caratteristica di $X+Y$:

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = e^{-|t|}\cdot e^{-|t|} = e^{-2|t|}$$

e quindi anche $X+Y \sim Ca(2)$.

3. Definiamo $X_1 = X_2 := X$, con $X \sim Ca(1)$. Allora X_1 e X_2 non sono ovviamente indipendenti, ma $\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{2X}(t) = e^{-2|t|} = \varphi_{X_1}(t)\varphi_{X_2}(t)$.