Esercizi di Calcolo delle Probabilità della 9^a settimana (Corso di Laurea in Matematica, Università degli Studi di Padova).

Esercizio 1. Sia N un processo di Poisson di parametro λ. Dimostrare che, per ogni $t > 0$, $N_t \sim Po(\lambda t)$.

Esercizio 2. Ricordiamo che un processo di Poisson di parametro $\lambda > 0$ è un processo $N^\lambda = (N_t^\lambda)_{t\geq 0}$ tale che $N_t^\lambda \sim Po(\lambda t)$ per ogni $t \geq 0$. Fissiamo un parametro $\lambda > 0$.

1. Dando per noto che per ogni $s < t$, $N_t^\lambda - N_s^\lambda$ è indipendente da $\mathcal{F}_s := \sigma(N_u^\lambda \mid u \leq s)$, dimostrare che $(N_t^\lambda - \lambda t)_t$ è una martingala.
2. Calcolare la funzione caratteristica di $N_t^{\lambda/a} - \frac{\lambda}{a}t$ per $a > 0$.
3. Detta $Y_t^a := a(N_t^{\lambda/a} - \frac{\lambda}{a}t)$, dimostrare che $Y_t^a \rightharpoonup 0$ per $a \to 0$ per ogni $t \geq 0$.
4. Detta $Z_t^a := \sqrt{a}(N_t^{\lambda/a} - \frac{\lambda}{a}t)$, dimostrare che $Z_t^a \rightharpoonup N(0, \lambda t)$ per $a \to 0$ per ogni $t \geq 0$.

Esercizio 3. Dato un tempo di arresto τ rispetto a una filtrazione $(\mathcal{F}_n)_n$, definiamo

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F}_\infty \mid A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \in I\}$$

dove $\mathcal{F}_\infty = \cup_{n\in I}\mathcal{F}_n$ (che a priori potrebbe essere contenuta strettamente in $\mathcal{A}$). Dimostrare che:

a) $\mathcal{F}_\tau$ è una σ-algebra che contiene $\sigma(\tau)$;

b) se τ_1, τ_2 sono tempi di arresto, allora anche $\tau_1 \wedge \tau_2$ e $\tau_1 \vee \tau_2$ lo sono, e $\{\tau_1 < \tau_2\}, \{\tau_1 \leq \tau_2\}, \{\tau_1 = \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$.

c) se τ_1, τ_2 sono tempi di arresto tali che $\tau_1 \leq \tau_2$, allora $\mathcal{F}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{F}_{\tau_2}$.

Esercizio 4. Siano $(X_n^1)_n$ e $(X_n^2)_n$ due processi di Bernoulli indipendenti di parametro $1/2$, e definiamo per $i = 1, 2$:

$$S_n^i := \sum_{k=1}^n X_k^i, \quad M_n^i := 2S_n^i - n, \quad M_n^{12} := M_n^1 M_n^2, \quad \mathcal{F}_n := \sigma(X_m^1, X_m^2 \mid m \leq n)$$

Fissato $a \in \mathbb{N}$, definiamo inoltre:

$$\tau := \inf\{n \mid \max(S_n^1, S_n^2) \geq a\}, \qquad \tau_i := \inf\{n \mid S_n^i \geq a\}, \quad i = 1, 2$$

a) Dimostrare che M^1, M^2, M^{12} sono martingale rispetto a $(\mathcal{F}_n)_n$;

b) Dimostrare che τ, τ_1, τ_2 sono tempi di arresto;

c) Tramite una legge dei grandi numeri, dimostrare che $S_n^i \to \infty$ quasi certamente, e quindi τ, τ_1, τ_2 sono quasi certamente finiti.

Esercizio 5. Sia Y_n il capitale di una compagnia di assicurazioni dopo n anni. Ogni anno $n \geq 1$, la compagnia riceve un totale (costante) di premi pari a P e paga un totale di sinistri pari a C_n, con $(C_n)_n$ i.i.d. di legge $N(\mu, \sigma^2)$: abbiamo quindi che il capitale all'inizio dell'anno $n+1$ è

$$Y_{n+1} = Y_n + P - C_{n+1}$$

dove $Y_0 > 0$ è costante. Definiamo poi $\tau := \inf\{n \mid Y_n \leq 0\}$ il **tempo di bancarotta** della compagnia.

1. Per quale $t \neq 0$ il processo $(e^{tY_n})_n$ è una martingala rispetto alla sua filtrazione naturale?
2. Ponendo $Z_n := \min(e^{tY_n}, 1)$ con t che soddisfa il punto 1., dimostrare che $(Z_n)_n$ è una supermartingala.
3. Supponendo che $P > \mu$, dimostrare che per ogni $m \geq 1$ si ha

   $$\mathbb{P}\{\tau \leq m\} \leq \exp\left(-\frac{2(P-\mu)}{\sigma^2} Y_0\right)$$

   Suggerimento: usare il teorema di arresto sulla supermartingala Z e sul tempo di arresto $\tau \wedge m$.

Esercizio 6. Supponiamo che un giocatore abbia un capitale iniziale di 1 Euro al tempo $n = 0$, e giochi al seguente gioco: ad ogni partita, in caso di vittoria il suo capitale raddoppia con probabilità p, e si dimezza con probabilità $1-p$, con $p \in (0,1)$. Supponiamo inoltre che i risultati delle partite siano indipendenti l'uno dall'altro.

1. Costruire, su un opportuno spazio probabilizzato, una successione di variabili aleatorie $(X_n)_n$ tali che ad ogni istante $n \in \mathbb{N}$, X_n rappresenti il capitale del giocatore all'istante n.
2. Determinare per quale p il processo X è una martingala.
3. Calcolare, per i diversi valori di $p \in (0,1)$, $\lim_{n\to\infty} E[X_n]$.
4. Dimostrare che se $p < 1/2$, allora $X_n \stackrel{\text{q.c.}}{\to} 0$ (suggerimento: considerare $S_n := \log X_n$ e usare la legge forte dei grandi numeri).

Nota: l'esercizio ci dice che se $p \in (1/3, 1/2)$, allora il capitale converge quasi certamente verso 0, nonostante che l'aspettativa di vincita diverga).

Esercizio 7. Sia $(X_n)_n$ una successione di variabili aleatorie i.i.d. tali che $\mathbb{P}\{X_n = \pm 1\} = 1/2$ per ogni n, $(a_n)_n$ una successione e definiamo

$$Y_n := \sum_{k=1}^{n} a_k X_k$$

1. Dimostrare che Y è una martingala rispetto alla sua filtrazione naturale.
2. Dimostrare che Y è limitata in L^2 (cioè $\sup_n \|Y_n\|_{L^2} < +\infty$) se e solo se $\sum_{k=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$.
3. Dimostrare che se $\sum_{k=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$, allora esiste Y tale che $Y_n \xrightarrow{\text{q.c.}} Y$.

Soluzioni su `http://www.math.unipd.it/~vargiolu/CalPro/`

Soluzioni

Esercizio 1. Per definizione di processo di Poisson, abbiamo $N_t := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{S_n \le t\}}$ con $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$ e $(X_i)_i$ i.i.d. $\sim Exp(\lambda)$. È chiaro che il processo N assume valori in $E = \mathbb{N}$. Allora, per ogni $t > 0$ si ha

$$\{N_t = 0\} = \{t < S_1\} = \{X_1 > t\}$$

e per ogni $t > 0$ e $k \in \mathbb{N}^*$ si ha

$$\{N_t = k\} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{S_n \le t\}} = k \right\} = \{S_k \le t < S_{k+1}\} = \{S_k \le t\} \setminus \{S_{k+1} \le t\}$$

poichè $S_{k+1} - S_k = X_{k+1} \ge 0$. Allora $\mathbb{P}\{N_t = 0\} = \mathbb{P}\{X_1 > t\} = e^{-\lambda t}$, e ricordando che $S_k \sim \Gamma(k, \lambda)$, per ogni $k \in \mathbb{N}^*$ si ha

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{N_t = k\} &= \mathbb{P}\{S_k \le t\} - \mathbb{P}\{S_{k+1} \le t\} = \int_0^t \left(\lambda^k \frac{x^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-\lambda x} - \lambda^{k+1} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} e^{-\lambda x} \right) dx = \\
&= \int_0^t \left(\lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \right) dx = \left[e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \right]_0^t = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}
\end{aligned}$$

e quindi $N_t \sim Po(\lambda t)$.

Esercizio 2.

1. Calcoliamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N_t^\lambda - \lambda t \,|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[N_t^\lambda - N_s^\lambda + N_s^\lambda \,|\mathcal{F}_s] - \lambda t = \mathbb{E}[N_t^\lambda - N_s^\lambda \,|\mathcal{F}_s] + N_s^\lambda - \lambda t = \\
&= \mathbb{E}[N_t^\lambda - N_s^\lambda] + N_s^\lambda - \lambda t = \mathbb{E}[N_t^\lambda] - \mathbb{E}[N_s^\lambda] + N_s^\lambda - \lambda t = \\
&= \lambda t - \lambda s + N_s^\lambda - \lambda t = N_s^\lambda - \lambda s
\end{aligned}$$

2. Ricordando la funzione caratteristica di una variabile aleatoria di Poisson, per ogni $u \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\varphi_{N_t^{\lambda/a} - \frac{\lambda}{a} t}(u) = \varphi_{N_t^{\lambda/a}}(u) e^{-i \frac{\lambda}{a} t u} = \exp\left(\frac{\lambda t}{a}(e^{iu} - 1) - i \frac{\lambda t}{a} u \right)$$

3. Per ogni $u \in \mathbb{R}$ calcoliamo

$$\varphi_{Y_t^a}(u) = \varphi_{N_t^{\lambda/a} - \frac{\lambda}{a} t}(au) = \exp\left(\frac{\lambda t}{a}(e^{iau} - 1) - i \frac{\lambda t}{a} au \right) = \exp\left(\frac{\lambda t}{a}(e^{iau} - 1) - i\lambda t u \right)$$

Usando il teorema di Paul Levy, la tesi è equivalente a mostrare che per ogni $u \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\lim_{a \to 0} \varphi_{Y_t^a}(u) &= \lim_{a \to 0} \exp\left(\frac{\lambda t}{a}(1 + iau - o(a) - 1) - i\lambda t u \right) = \\
&= \lim_{a \to 0} \exp\left(\lambda t i u - o(1) - i\lambda t u \right) = e^0 = 1
\end{aligned}$$

che è la funzione caratteristica della costante 0.

4. Per ogni $u \in \mathbb{R}$ calcoliamo

$$\begin{aligned}
\varphi_{Z_t^a}(u) &= \varphi_{N_t^{\lambda/a} - \frac{\lambda}{a}t}(\sqrt{a}u) = \exp\left(\frac{\lambda t}{a}(e^{i\sqrt{a}u} - 1) - i\frac{\lambda}{a}t\sqrt{a}u\right) = \\
&= \exp\left(\frac{\lambda t}{a}(e^{i\sqrt{a}u} - 1) - i\frac{\lambda t}{\sqrt{a}}u\right)
\end{aligned}$$

Usando il teorema di Paul Levy, la tesi è equivalente a mostrare che per ogni $u \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 0} \varphi_{Y_t^a}(u) &= \lim_{a\to 0} \exp\left(\frac{\lambda t}{a}\left(1 + i\sqrt{a}u - \frac{1}{2}au^2 + o(a) - 1\right) - i\frac{\lambda t}{\sqrt{a}}u\right) = \\
&= \lim_{a\to 0} \exp\left(\frac{\lambda t}{a}\left(i\sqrt{a}u - \frac{1}{2}au^2 + o(a) - i\sqrt{a}u\right)\right) = \\
&= \lim_{a\to 0} \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda t u^2 + o(1)\right) = e^{-\frac{1}{2}\lambda t u^2}
\end{aligned}$$

che è la funzione caratteristica della legge $N(0, \lambda t)$.

Esercizio 3.

a) Verifichiamo che $\mathcal{F}_\tau$ è una σ-algebra. Ovviamente $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}_\tau$: difatti, per ogni $n \in I$, $\emptyset \cap \{\tau \leq n\} = \emptyset \in \mathcal{F}_n$ e $\Omega \cap \{\tau \leq n\} = \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. Inoltre, se $A \in \mathcal{F}_\tau$, allora per ogni $n \in I$, $A^c \cap \{\tau \leq n\} = \{\tau \leq n\} \setminus (A \cap \{\tau \leq n\}) \in \mathcal{F}_n$. Infine, se $(A_k)_k \subseteq \mathcal{F}_\tau$, allora per ogni $n \in I$, $\cup_k A_k \cap \{\tau \leq n\} = \cup_k (A_k \cap \{\tau \leq n\})$ è un'unione numerabile di eventi in $\mathcal{F}_n$, e quindi è contenuta in $\mathcal{F}_n$. Le tre proprietà delle σ-algebre sono dunque verificate da $\mathcal{F}_\tau$.

Verifichiamo ora che $\mathcal{F}_\tau$ contiene $\sigma(\tau)$: quest'ultima è generata dagli eventi $(\{\tau \leq k\})_k$, che appartengono a $\mathcal{F}_\infty$. Siccome per ogni n, k, si ha che $\{\tau \leq k\} \cap \{\tau \leq n\} = \{\tau \leq k \wedge n\} \in \mathcal{F}_{k\wedge n} \subseteq \mathcal{F}_n$, allora $\{\tau \leq k\} \in \mathcal{F}_\tau$ per ogni k, e quindi $\sigma(\tau) \subseteq \mathcal{F}_\tau$.

b) Per ogni $n \in I$, abbiamo che $\{\tau_1 \wedge \tau_2 > n\} = \{\tau_1 > n\} \cap \{\tau_2 > n\} \in \mathcal{F}_n$ e $\{\tau_1 \vee \tau_2 \leq n\} = \{\tau_1 \leq n\} \cap \{\tau_2 \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, quindi sia $\tau_1 \wedge \tau_2$ che $\tau_1 \vee \tau_2$ sono tempi di arresto. Inoltre per ogni $n \in I$ si ha

$$\{\tau_1 < \tau_2\} \cap \{\tau_1 \leq n\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{\tau_1 = k < \tau_2\} \in \mathcal{F}_n$$

e quindi $\{\tau_1 < \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_1}$; allo stesso modo si dimostra che $\{\tau_1 < \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_2}$; inoltre si ha che $\{\tau_1 \leq \tau_2\} = \{\tau_1 > \tau_2\}^c$, quindi anche $\{\tau_1 \leq \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$; infine $\{\tau_1 = \tau_2\} = \{\tau_1 \geq \tau_2\} \setminus \{\tau_1 < \tau_2\} \in \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$.

c) Se $A \in \mathcal{F}_{\tau_1}$, allora per ogni n si ha $A \cap \{\tau_1 \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. Siccome $\{\tau_2 \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ e $\tau_1 \leq \tau_2$, si ha

$$A \cap \{\tau_2 \leq n\} = (A \cap \{\tau_1 \leq n\}) \cap \{\tau_2 \leq n\} \in \mathcal{F}_n$$

Esercizio 4.

a) Per $i = 1, 2$ si ha:

$$\mathbb{E}[M_{n+1}^i \mid \mathcal{F}_n] = M_n^i + \mathbb{E}[2X_{n+1}^i - 1 \mid \mathcal{F}_n] = M_n^i + 2\mathbb{E}[X_{n+1}^i] - 1 = M_n^i + 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = M_n^i$$

Si ha poi:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[M_{n+1}^{12} - M_n^{12} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[(2S_{n+1}^1 - n - 1)(2S_{n+1}^2 - n - 1) - (2S_n^1 - n)(2S_n^2 - n) \mid \mathcal{F}_n] = \\
&= \mathbb{E}[(2S_n^1 - n + 2X_{n+1}^1 - 1)(2S_n^2 - n + 2X_{n+1}^2 - 1) - (2S_n^1 - n)(2S_n^2 - n) \mid \mathcal{F}_n] = \\
&= \mathbb{E}[(2X_{n+1}^1 - 1)(2S_n^2 - n) + (2S_n^1 - n)(2X_{n+1}^2 - 1) + (2X_{n+1}^1 - 1)(2X_{n+1}^2 - 1) \mid \mathcal{F}_n] = \\
&= (2S_n^2 - n)\mathbb{E}[2X_{n+1}^1 - 1] + (2S_n^1 - n)\mathbb{E}[2X_{n+1}^2 - 1] + \mathbb{E}[(2X_{n+1}^1 - 1)(2X_{n+1}^2 - 1)] = \\
&= (2S_n^2 - n) \cdot 0 + (2S_n^1 - n) \cdot 0 + \mathbb{E}[(2X_{n+1}^1 - 1)]\mathbb{E}[(2X_{n+1}^2 - 1)] = 0
\end{aligned}$$

b) Entrambi S^1 ed S^2 sono processi adattati, come anche $\max(S^1, S^2)$, e τ, τ_1, τ_2 sono tempi di uscita di $\max(S^1, S^2)$, S^1 ed S^2 dall'insieme $[0, a)$, quindi sono tempi di arresto.

c) Per la legge forte dei grandi numeri (sia di Rajchmann che di Kolmogorov-Khintchine), per $i = 1, 2$ abbiamo che $S_n^i/n \overset{\text{q.c.}}{\to} \mathbb{E}[X_1^i] = 1/2$, e questo significa che $\lim_{n\to\infty} S_n^i = \lim_{n\to\infty} 1/2 \cdot n = +\infty$ q.c.; per come è definito τ_i, questo significa che definitivamente $S_n^i > a$ q.c., e quindi $\tau_i < +\infty$ q.c.; siccome $\tau < \tau_i$, anche $\tau < +\infty$ q.c.

Esercizio 5.

1. Innanzitutto le $(Y_n)_n$ sono variabili aleatorie gaussiane, quindi $(e^{tY_n})_n \in L^1$. Inoltre C_{n+1} è indipendente da $\mathcal{F}_n$ per ogni $n \geq 0$. Abbiamo poi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{tY_{n+1}}|\mathcal{F}_n^Y] &= \mathbb{E}[e^{t(Y_n+P-C_{n+1})}|\mathcal{F}_n^Y] = e^{t(Y_n+P)}\mathbb{E}[e^{-tC_{n+1}}|\mathcal{F}_n^Y] = \\
&= e^{t(Y_n+P-\mu)}\mathbb{E}[e^{-t(C_{n+1}-\mu)}] = e^{t(Y_n+P-\mu)}e^{\frac{1}{2}t^2\sigma^2}
\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che, se $X \sim N(0; \sigma^2)$, allora $\mathbb{E}[e^X] = e^{\frac{1}{2}\sigma^2}$. Allora $(e^{tY_n})_n$ è una martingala rispetto alla sua filtrazione naturale se e solo se

$$t(P - \mu) + \frac{1}{2}t^2\sigma^2 = 0$$

Questa equazione ha le due soluzioni $t = 0$ e $t = -\frac{2(P-\mu)}{\sigma^2}$.

2. La tesi è equivalente a mostrare che $-Z$ è una submartingala. Poiché la funzione $\varphi(x) = -\min(x, 1)$ è convessa e $(e^{tY_n})_n$ è una martingala, abbiamo che $-Z_n = \varphi(e^{tY_n})$ definisce una submartingala per la disuguaglianza di Jensen, e quindi Z è una supermartingala.

3. Dal teorema di arresto segue per ogni $\tilde{\tau}$ tempo di arresto limitato

$$\mathbb{E}[Z_{\tilde{\tau}}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z_{\tilde{\tau}}|\mathcal{F}_0^Y]] \leq E[Z_0] = \exp\left(-\frac{2(P-\mu)}{\sigma^2}Y_0\right)$$

Se ora scegliamo $\tilde{\tau} = \tau \wedge m$ per $m \geq 1$, allora $\tau \wedge m$ è un tempo di arresto limitato e, poichè $t < 0$, abbiamo $e^{tY_\tau} \geq 1$ e quindi $Z_\tau = 1$, e da questo segue

$$Z_{\tau\wedge m} = \mathbf{1}_{\{\tau>m\}}Z_m + \mathbf{1}_{\{\tau\leq m\}}Z_\tau = \mathbf{1}_{\{\tau>m\}}Z_m + \mathbf{1}_{\{\tau\leq m\}} \geq \mathbf{1}_{\{\tau\leq m\}}$$

e infine

$$\mathbb{P}\{\tau \le m\} = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\tau \le m\}}] \le E[Z_{\tau \le m}] \le \exp\left(-\frac{2(P-\mu)}{\sigma^2} Y_0\right)$$

Esercizio 6.

1. Possiamo ad esempio considerare un processo di Bernoulli $(Z_i)_i$ di parametro p in uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ e definire $X_0 \equiv 1$, e ricorsivamente $X_{n+1} := X_n(2\mathbf{1}_{\{Z_{n+1}=1\}} + 1/2\mathbf{1}_{\{Z_{n+1}=0\}}) = X_n(2Z_{n+1} + 1/2(1 - Z_{n+1}))$, quindi per concludere $X_n = \prod_{i=1}^n (3/2 Z_i + 1/2)$. Ricordiamo che un possibile spazio probabilizzato su cui possiamo definire un processo di Bernoulli è costituito dallo spazio prodotto $\Omega := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{A} := \mathcal{P}(\{0,1\})^{\otimes \mathbb{N}}$ con $\mathbb{P} := Be(p)^{\otimes \mathbb{N}}$, con $Z_i(\omega) := \omega_i$.

2. Calcoliamo

$$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n \mathbb{E}\left[\frac{3}{2} Z_i + \frac{1}{2} \mid \mathcal{F}_n\right] = X_n \mathbb{E}\left[\frac{3}{2} Z_i + \frac{1}{2}\right] = X_n\left(\frac{3}{2} p + \frac{1}{2}\right)$$

Questa quantità è $\gtreqless X_n$ a seconda che $\frac{3}{2}p + \frac{1}{2} \gtreqless 1$, cioè X è una (sub-)(super-)martingala a seconda che $p(>)(<) = \frac{1}{3}$.

3. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo che

$$\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n \left(\frac{3}{2} Z_i + \frac{1}{2}\right)\right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\frac{3}{2} Z_i + \frac{1}{2}\right] = \left(\frac{3}{2} p + \frac{1}{2}\right)^n \overset{n \to \infty}{\to} \begin{cases} +\infty & \text{se } p > \frac{1}{3} \\ 1 & \text{se } p = \frac{1}{3} \\ 0 & \text{se } p < \frac{1}{3} \end{cases}$$

4. Abbiamo che $S_n := \log X_n = \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{3}{2} Z_i + \frac{1}{2}\right)$. Allora per la legge forte dei grandi numeri (sia di Rajchmann che di Kolmogorov-Khintchine), abbiamo che

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{n} \overset{\text{q.c.}}{\to} \mathbb{E}\left[\log\left(\frac{3}{2} Z_i + \frac{1}{2}\right)\right] &= p \log 2 + (1-p) \log \frac{1}{2} = p \log 2 - (1-p) \log 2 = \\ &= (2p - 1) \log 2 \end{aligned}$$

Se $p < 1/2$, allora $\frac{S_n}{n} \overset{\text{q.c.}}{\to} (2p-1)\log 2 < 0$, e quindi $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n(2p - 1)\log 2 = -\infty$ q.c.. Di conseguenza $\lim_{n\to\infty} X_n = \lim_{n\to\infty} e^{S_n} = 0$ q.c.

Esercizio 7.

1. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n^Y] &= \mathbb{E}[Y_n + a_{n+1} X_{n+1} | \mathcal{F}_n^Y] = Y_n + a_{n+1} \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n^Y] = \\ &= Y_n + a_{n+1} \mathbb{E}[X_{n+1}] = Y_n + a_{n+1} \cdot 0 = Y_n \end{aligned}$$

dove la seconda uguaglianza segue dalla linearità della speranza condizionale e la terza dal fatto che X_{n+1} è indipendente da $\mathcal{F}_n^Y$, poichè questa σ-algebra dipende solo da $X_1, \dots, X_n$.

2. Abbiamo

$$\|Y_n\|_{L^2} = \mathbb{E}[Y_n^2] = \sum_{k=1}^n a_k^2 \mathbb{E}[X_k^2] + \sum_{k,l=1}^n a_k a_l \mathbb{E}[X_k]\mathbb{E}[X_l] = \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot 1 + \sum_{k,l=1}^n a_k a_l \cdot 0 = \sum_{k=1}^n a_k^2$$

e quindi $\sup_n \|Y_n\|_{L^2} = \sup_n \sum_{k=1}^n a_k^2 = \sum_{k=1}^\infty a_k^2$, e segue la tesi.

3. Nell'ipotesi fatta, Y è limitata in L^2, quindi si ha anche che

$$\sup_n \mathbb{E}[Y_n^-] \leq \sup_n \mathbb{E}[|Y_n|] \leq \sup_n \mathbb{E}[|Y_n|^2]^{1/2} < +\infty$$

Si può quindi applicare il teorema di convergenza quasi certa per martingale e affermare che esiste Y tale che $Y_n \xrightarrow{\text{q.c.}} Y$.