Teoria della misura

Tiziano Vargiolu
Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata
via Belzoni, 7 - 35131 Padova
email: `vargiolu@galileo.math.unipd.it`

8 ottobre 2003

Indice

Introduzione **iii**

1 Teoria della misura **1**
1.1 Definizione di misura 1
1.2 Misure esterne 6
1.3 Misura di Lebesgue e misure di Borel sulla retta reale 9

2 Integrazione **13**
2.1 Funzioni misurabili 13
2.2 Integrazione di funzioni non negative 17
2.3 Integrale di funzioni reali 20
2.4 Convergenza in misura 23
2.5 Integrale di Lebesgue 25
2.6 Misure prodotto 26
2.7 Integrale di Lebesgue n-dimensionale 28
2.8 Integrali dipendenti da parametro 30

A Complementi **31**
A.1 Insieme di Cantor 31
A.2 Integrazione di funzioni complesse 32

B Temi di esame con soluzioni **34**
B.1 Prova scritta del 28 gennaio 1999 34
B.2 Prova scritta del 18 febbraio 1999 35
B.3 Prova scritta dell'11 giugno 1999 36
B.4 Prova scritta del 2 luglio 1999 37
B.5 Prova scritta del 10 settembre 1999 38
B.6 Prova scritta del 27 settembre 1999 38
B.7 Prova scritta del 26 gennaio 2000 39
B.8 Prova scritta del 18 febbraio 2000 40
B.9 Prova scritta del 14 giugno 2000 41
B.10 Prova scritta del 5 luglio 2000 42
B.11 Prova scritta del 21 settembre 2000 42
B.12 Prova scritta del 16 novembre 2000 43

B.13 Prova scritta del 21 dicembre 2000 44
B.14 Prova scritta del 20 febbraio 2001 45
B.15 Prova scritta del 7 luglio 2001 46
B.16 Prova scritta del 9 settembre 2001 47
B.17 Prova scritta del 19 settembre 2001 48

Introduzione

Questo lavoro riprende un corso di esercitazioni di Istituzioni di Analisi Superiore in cui mi era stato chiesto di fare una breve introduzione alla teoria della misura. Ho quindi cercato di procedere in modo che uno studente del terzo anno del corso di laurea in Matematica arrivasse in poco tempo (una decina di ore) a poter utilizzare i classici teoremi di limite dell'integrazione di Lebesgue (Beppo Levi, Fatou e convergenza dominata), partendo dalla definizione di spazio misurabile e di misura. È stato dedicato anche abbastanza spazio alla costruzione della misura di Lebesgue n-dimensionale, che é stato l'esempio che storicamente ha fatto nascere la teoria della misura come la conosciamo oggi. La referenza principale per questo lavoro è stata il libro di Folland [2], a cui si rimanda per approfondimenti. Alla fine sono stati poi inseriti i temi di esame relativi alla teoria della misura dati all'Università di Padova negli appelli dall'Anno Accademico 1998-'99.

Vista l'origine di questo lavoro, esso può essere utilizzato per una breve ma rigorosa introduzione alla teoria della misura nei corsi di Analisi II (per quanto riguarda l'integrale di Lebesgue) e di Istituzioni di Analisi Superiore. A questo scopo si consiglia di svolgere le sezioni 1.1, 1.2 (senza la dimostrazione del teorema di Caratheodory), 1.3 (eventualmente omettendo la dimostrazione della proposizione 1.25), 1.4 (limitandosi al caso in cui A è finito), 2.1 (concentrandosi eventualmente solo sulle funzioni reali), 2.2, 2.3 (concentrandosi eventualmente solo sulle funzioni reali), 2.6, 2.7. Dato che la teoria è stata trattata in modo abbastanza generale, il materiale può essere utilizzato anche nell'ambito di un corso di Calcolo delle Probabilità.

Capitolo 1

Teoria della misura

1.1 Definizione di misura

Definizione 1.1 Prendiamo un insieme X e una famiglia $\mathcal{M}$ di sottoinsiemi di X (nel seguito si indicherà questo con $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$). Diciamo che $\mathcal{M}$ è un'**algebra** se:

i) $\emptyset \in \mathcal{M}$

ii) $A \in \mathcal{M} \;\Rightarrow\; A^c \in \mathcal{M}$ ($\mathcal{M}$ è **chiusa per complemento**)

iii) $A, B \in \mathcal{M} \;\Rightarrow\; A \cup B \in \mathcal{M}$ ($\mathcal{M}$ è **chiusa per unione finita**)

Osserviamo che dalla definizione di algebra segue che $X \in \mathcal{M}$ e che $A, B \in \mathcal{M} \;\Rightarrow\; A \cap B \in \mathcal{M}$, cioé che $\mathcal{M}$ è **chiusa per intersezione finita**. Infatti si può ottenere $A \cap B$ in questo modo:

$$A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$$

Definizione 1.2 Prendiamo un'algebra $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Una funzione d'insieme $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ si dice **finitamente additiva** o **misura finitamente additiva** se:

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) $A, B \in \mathcal{M}, A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

Teorema 1.3 *Sia μ una misura finitamente additiva. Allora:*

a) $A, B \in \mathcal{M}, A \subseteq B \;\Rightarrow\; \mu(A) \leq \mu(B)$ (*μ è* **monotona**)

b) $A, B \in \mathcal{M}, A \subseteq B, \mu(A) < +\infty \;\Rightarrow\; \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

c) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M} \;\Rightarrow\; \mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$ (*μ è* **subadditiva**)

Dimostrazione. a) Poiché $B = A \cup (B \setminus A)$, si ha che $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$.

b) Se $\mu(A) < +\infty$, allora si può sottrarre $\mu(A)$ da entrambi i membri della relazione $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ e si ottiene la tesi.

c) Si ha

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \ldots \cup \left(A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right)$$

e dunque

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \ldots + \mu \left(A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right)$$

Applicando (a) si ottiene la tesi. □

Esempio 1.4 Prendiamo un insieme X finito e $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Allora $\mathcal{A}$ é un'algebra. Se poi prendiamo una generica funzione $f : X \in [0, +\infty]$, allora questa definisce una misura finitamente additiva in questo modo:

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} f(x)$$

Esempio 1.5 ("misura" di Jordan-Riemann) Prendiamo $X = \mathbb{R}$ e

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} I_i \mid I_i \text{ intervalli disgiunti} \right\}$$

Allora $\mathcal{A}$ è un'algebra; se poi per un generico intervallo I di estremi $a < b$ (quindi della forma (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ o $[a, b]$) definiamo $\mu(I) = b - a$, allora possiamo estendere μ ad $\mathcal{A}$ in questo modo:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} I_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(I_i)$$

Questa funzione è nota come **misura di Jordan-Riemann**. Nonostante il nome, è una misura finitamente additiva, e non una misura nel senso della teoria della misura. Tuttavia la teoria della misura è nata proprio per estendere la misura di Riemann ad insiemi più generali di quelli di $\mathcal{A}$.

Definizione 1.6 Prendiamo un insieme X e una famiglia $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Diciamo che $\mathcal{M}$ è una **σ-algebra** se:

i) $\emptyset \in \mathcal{M}$

ii) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$

iii) $A_n \in \mathcal{M}\ \forall n \geq 1 \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ ($\mathcal{M}$ è **chiusa per unione numerabile**)

Osserviamo che una σ-algebra è anche un'algebra, quindi una σ-algebra è chiusa anche per complemento, per unione finita e per intersezione finita. Inoltre essa è chiusa anche per intersezione numerabile (esercizio).

Definizione 1.7 Prendiamo una σ-algebra $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Una funzione d'insieme $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ si dice **misura** se:

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) $A_n \in \mathcal{M}\ \forall n \geq 1$, A_n disgiunti $\Rightarrow$ $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

Presentiamo ora un concetto che mette insieme gli oggetti delle ultime due definizioni. Diamo inoltre un po' di terminologia di teoria della misura.

Definizione 1.8 Si dice **spazio misurato** una terna $(X, \mathcal{M}, \mu)$, dove X è un insieme generico, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è una σ-algebra, e μ è una misura su $\mathcal{M}$. La coppia $(X, \mathcal{M})$ (senza specificare la misura μ) si dice **spazio misurabile**. Gli insiemi $A \in \mathcal{M}$ si dicono **insiemi misurabili**. Se $A \in \mathcal{M}$, $\mu(A) = 0$, allora A si dice **insieme trascurabile**. Se una proprietà vale $\forall x \in X \setminus A$, con A trascurabile, allora si dice che la proprietà vale **quasi ovunque** (abbreviato q.o.). Infine, la misura μ su X si dice **finita** se $\mu(X) < +\infty$, e si dice **σ-finita** se esiste una partizione $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ tale che $\mu(A_n) < +\infty$ per ogni n.

Le misure godono naturalmente di tutte le proprietà delle misure finitamente additive; in particolare, sono monotone e (finitamente) subadditive. Si può dimostrare tuttavia che esse godono di altre proprietà:

Teorema 1.9 *Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurato. Allora*

a) se $A, B \in \mathcal{M}$, $A \subseteq B$, allora $\mu(A) \leq \mu(B)$ **(monotonia)**

b) se $(A_n)_n \subseteq \mathcal{M}$, allora $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ **(subadditività numerabile)**

c) se $(A_n)_n \subseteq \mathcal{M}$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$, allora $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ **(continuità dal basso)**

d) se $(A_n)_n \subseteq \mathcal{M}$, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$, e $\mu(A_n) < +\infty$ per qualche n, allora $\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ **(continuità dall'alto)**

Dimostrazione. a) Vedi teorema 1.3

b) Si ha

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \ldots \cup \left(A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) \cup \ldots$$

e dunque

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \ldots + \mu\left(A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \right) + \ldots$$

Applicando (a) si ottiene la tesi.

c) Poniamo $A_0 = \emptyset$. Allora:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \setminus A_{n-1}) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n \setminus A_{n-1}) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$$

d) Poniamo $B_i = A_n \setminus A_i$ per $i > n$. Allora $B_{n+1} \subseteq B_{n+2} \subseteq \cdots$, $\mu(A_n) = \mu(B_i) + \mu(A_i)$ per $i > n$, e $\bigcup_{i=n+1}^{\infty} B_i = A_n \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$. Allora per (c) si ha

$$\mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) + \lim_{i\to\infty} \mu(B_i) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) + \lim_{i\to\infty} (\mu(A_n) - \mu(A_i))$$

Siccome $\mu(A_n) < +\infty$, possiamo sottrarlo da entrambi i lati e otteniamo il risultato. □

Vediamo ora alcuni esempi di spazi misurati.

Esempio 1.10 Prendiamo un insieme X numerabile e $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$. Allora $\mathcal{M}$ é una σ-algebra. Se poi prendiamo una generica funzione $f : X \to [0, +\infty]$, allora questa definisce una misura su X in questo modo:

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} f(x)$$

Se $f(x) < +\infty \ \forall x \in X$, allora μ é σ-finita su X.

Esempio 1.11 (delta di Dirac) Prendiamo un insieme generico X e definiamo $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$. Prendiamo poi un $x \in X$ fissato e definiamo

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} \qquad \forall A \subseteq X$$

La δ_x è una misura nota come **delta di Dirac nel punto** x. Essa è una misura finita su X. Il suo ruolo nell'analisi é degno di nota: infatti i "non matematici" (fisici, ingegneri, ecc.) tendono ad usarla nella teoria delle equazioni differenziali come se fosse una funzione reale su X che "vale $+\infty$ in x e 0 altrove. L'esistenza di questa ed altre "funzioni strane" ha fatto sí che si sviluppasse la **teoria delle funzioni generalizzate**, meglio nota come **teoria delle distribuzioni**.

Esempio 1.12 (misura che conta i punti) Prendiamo un insieme generico X e definiamo $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$, e

$$\mu(A) = \text{Card } (A)$$

La μ è nota come **misura che conta i punti**. Essa è finita se X è finito, e σ-finita se X è numerabile.

Esempio 1.13 Prendiamo un insieme infinito X e definiamo $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$, e

$$\mu(A) = \begin{cases} +\infty & \text{se } A \text{ è infinito} \\ 0 & \text{se } A \text{ è finito} \end{cases} \qquad \forall A \subseteq X$$

Allora μ è una misura finitamente additiva, ma non è una misura. Per vedere questo, basta verificare su un insieme numerabile A che $\mu(A) = 1 \neq \sum_{x\in A} \mu(\{x\}) = 0$.

Teorema 1.14 *Sia $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(X)$ generica. Allora esiste una σ-algebra $\mathcal{M}$ che é la più piccola σ-algebra contenente $\mathcal{F}$. $\mathcal{M}$ si chiama allora* **σ-algebra generata da** *$\mathcal{F}$ e si indica con $\sigma(\mathcal{F})$.*

Dimostrazione. Definiamo

$$\mathcal{M} = \bigwedge_{\mathcal{M}'\ \sigma\text{-alg.},\mathcal{F}\in\mathcal{M}'} \mathcal{M}'$$

cioé $\mathcal{M}$ è uguale alla più grande classe contenuta nelle classi $\mathcal{M}'$ della definizione. Siccome $\mathcal{P}(X)$ è una σ-algebra, la classe su cui é definita $\mathcal{M}$ è non vuota, quindi $\mathcal{M}$ è ben definita. Inoltre, si verifica facilmente che $\mathcal{M}$ è una σ-algebra che contiene $\mathcal{F}$. Infine, $\mathcal{M}$ è la più piccola σ-algebra che contiene $\mathcal{F}$ per definizione. $\square$

Definizione 1.15 Se $(X, \mathcal{E})$ è uno spazio topologico, indichiamo con $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{E})$ la σ-algebra generata dalla topologia di X. Essa viene comunemente chiamata σ-algebra dei **boreliani** di X, e i suoi insiemi vengono chiamati **boreliani**, o **insiemi di Borel** di X. $\mathcal{B}(X)$ contiene gli aperti e i chiusi di X, e anche insiemi più complicati, come unioni infinite di chiusi o intersezioni infinite di aperti.

Esempio 1.16 (estensione della misura di Riemann) Prendiamo $X = \mathbb{R}$ e $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Vorremmo ora estendere la misura di Riemann a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ in modo che la misura di un intervallo sia ancora data dalla differenza dei suoi estremi. Purtroppo non possiamo ancora fare questo con la teoria che abbiamo finora; vedremo però nella prossima sezione come estendere questa teoria, fino ad arrivare a costruire una tale misura (e molte altre).

Presentiamo infine un concetto che ci sarà utile in seguito.

Definizione 1.17 *Una σ-algebra $\mathcal{M}$ si dice* **completa** *rispetto alla misura μ se contiene tutti i sottoinsiemi degli insiemi trascurabili, cioé se $\mu(A) = 0$ implica che $B \in \mathcal{M}\ \forall B \subseteq A$.*

Teorema 1.18 *Se $(X, \mathcal{M}, \mu)$ è uno spazio misurato, e chiamiamo*

$$\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{M} \mid \mu(N) = 0\}$$

la classe degli insiemi trascurabili, e

$$\bar{\mathcal{M}} = \{E \cup F \mid E \in \mathcal{M}, F \subseteq N \text{ per qualche } N \in \mathcal{N}\}$$

allora $\bar{\mathcal{M}}$ è una σ-algebra completa rispetto a $\bar{\mu}$, che è l'unica estensione di μ a $\bar{\mathcal{M}}$. $\bar{\mathcal{M}}$ si chiama **completamento** *di $\mathcal{M}$ rispetto a μ.*

Dimostrazione. Siccome $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$ sono chiuse per unioni numerabili, anche $\bar{\mathcal{M}}$ lo é. Preso un generico elemento $E \cup F \in \bar{\mathcal{M}}$, con $F \subset N \in \mathcal{N}$, possiamo assumere che $E \cap N = \emptyset$ (altrimenti possiamo rimpiazzare F, N con $F \setminus E$, $N \setminus E$). Allora $E \cup F = (E \cup N) \cap (N^c \cup F)$, quindi $(E \cup F)^c = (E \cup N)^c \cup (N \setminus F)$. Ma $(E \cup N)^c \in \mathcal{M}$ e $(N \setminus F) \subseteq N \in \mathcal{N}$, quindi $(E \cup F)^c \in \bar{\mathcal{M}}$, e quindi $\bar{\mathcal{M}}$ è una σ-algebra. Estendiamo ora μ a $\mathcal{M}$ in questo modo:

per $E \cup F \in \bar{\mathcal{M}}$, con $F \subset N \in \mathcal{N}$, poniamo $\bar{\mu}(E \cup F) = \mu(E)$. Questa misura è ben definita, poiché se $E_1 \cup F_1 = E_2 \cup F_2$, con $F_j \subset N_j \in \mathcal{N}$, allora $E_1 \subset E_2 \cup N_2$, quindi $\mu(E_1) \leq \mu(E_2) + \mu(N_2) = \mu(E_2)$, e allo stesso modo $\mu(E_2) \leq \mu(E_1)$. Si verifica facilmente che $\bar{\mu}$ é una misura completa su $\bar{\mathcal{M}}$, e che $\bar{\mu}$ è la sola misura su $\bar{\mathcal{M}}$ che estende μ; i dettagli sono lasciati per esercizio. □

1.2 Misure esterne

Definizione 1.19 Prendiamo un insieme X. Una funzione d'insieme $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ si dice **misura esterna** se:

i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

ii) $A \subseteq B \ \Rightarrow \ \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

iii) $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

Questi oggetti si chiamano misure esterne a causa del modo usuale in cui vengono costruiti, che vediamo nella prossima proposizione.

Proposizione 1.20 *Siano $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ e $\rho : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ tali che $\emptyset \in \mathcal{E}$, $X \in \mathcal{E}$ e $\rho(\emptyset) = 0$. Per ogni $A \subseteq X$ poniamo*

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \rho(E_n) \mid E_n \in \mathcal{E}, A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right\}$$

Allora μ^* è una misura esterna.

Dimostrazione. Siccome $X \in \mathcal{E}$, per ogni $A \subseteq X$ la famiglia (E_n) definita da $E_n = X$ $\forall n$ è un ricoprimento di A in $\mathcal{E}$, e quindi l'insieme di definizione di μ^* non è vuoto e la definizione ha senso. Abbiamo poi che $\mu^*(\emptyset) = 0$ (basta prendere $E_n = \emptyset \ \forall n$). Inoltre se $A \subseteq B$, allora ogni ricoprimento di B è anche un ricoprimento di A, quindi l'insieme di definizione di $\mu^*(A)$ è più grande di quello di $\mu^*(B)$, e quindi $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$. Infine, se $(A_n)_n \subseteq \mathcal{P}(X)$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni n esiste un ricoprimento $(E_j^n)_j$ di A_n tale che $A_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j^n$ e $\mu^*(A_n) + \varepsilon 2^{-n} \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E_j^n)$. Allora $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{j,n=1}^{\infty} E_j^n$ e $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) + \varepsilon \geq \sum_{j,n=1}^{\infty} \mu^*(E_j^n)$, e quindi $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A^n)$. Siccome ε è arbitrario, abbiamo la tesi. □

Se μ^* è una misura esterna su X, un insieme $A \subseteq X$ é chiamato **μ^*-misurabile** o **misurabile secondo Caratheodory** se

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \quad \forall E \subseteq X$$

Teorema 1.21 (Caratheodory) *Se μ^* è una misura esterna su X, e chiamiamo $\mathcal{M} = \{A \subseteq X \mid A \text{ è } \mu^*\text{-misurabile}\}$, allora $\mathcal{M}$ è una σ-algebra, e la restrizione μ di μ^* a $\mathcal{M}$ è una misura completa.*

Dimostrazione. $\mathcal{M}$ è chiuso per complemento, poiché la definizione di μ^*-misurabilità di A è simmetrica in A e A^c. Inoltre, se $A, B \in \mathcal{M}$ e $E \subset X$, per subadditività abbiamo:

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \\ &= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c) \geq \\ &\geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c) \end{aligned}$$

Ne segue che anche $A \cup B \in \mathcal{M}$, quindi $\mathcal{M}$ é un'algebra. Inoltre, se $A, B \in \mathcal{M}$ e $A \cap B = \emptyset$, allora:

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap A^c) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

quindi μ^* è finitamente additiva su $\mathcal{M}$. Per mostrare che $\mathcal{M}$ é una σ-algebra è sufficiente mostrare che $\mathcal{M}$ è chiusa per unione disgiunta numerabile. Se $(A_j)_j$ è una successione di insiemi disgiunti in $\mathcal{M}$, poniamo $B_n = \bigcup_{j=1}^n A_j$ e $B = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$. Allora per ogni $E \subset X$:

$$\begin{aligned} \mu^*(E \cap B_n) &= \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c) = \\ &= \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1}) \end{aligned}$$

quindi per induzione si ha che $\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{j=1}^n \mu^*(E \cap A_j)$. Quindi

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \geq \sum_{j=1}^n \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B^c)$$

Facendo tendere $n \to \infty$ otteniamo

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\geq \sum_{j=1}^\infty \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^*\left(\bigcup_{j=1}^\infty (E \cap A_j)\right) + \mu^*(E \cap B^c) = \\ &= \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^*(E) \end{aligned}$$

quindi tutte le disuguaglianze nell'ultimo calcolo sono uguaglianze. Ne segue che $B \in \mathcal{M}$, e prendendo $E = B$ si ha che $\mu^*(B) = \sum_{j=1}^\infty \mu^*(A_j)$, quindi μ^* é numerabilmente additiva su $\mathcal{M}$. Infine, se $\mu^*(A) = 0$ per ogni $E \subset A$ si ha

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E)$$

e quindi $A \in \mathcal{M}$, e $\mu^*_{|\mathcal{M}}$ è una misura completa. $\square$

Vediamo quali applicazioni ha il teorema di Carathéodory. Per fare questo, dobbiamo dare un'altra definizione.

Definizione 1.22 Prendiamo un'algebra $\mathcal{A}$ su un insieme X. Una funzione d'insieme $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ si dice **premisura** se:

i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

ii) se $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ sono disgiunti e tali che $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$, allora $\mu(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) = \sum_{n=1}^\infty \mu^*(A_n)$

Se μ è una premisura su $\mathcal{A}$, allora induce una misura esterna μ^* su X in virtù della proposizione (1.20), definita da

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \mid A_n \in \mathcal{A}, E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\} \tag{1.1}$$

Proposizione 1.23 *Se μ è una premisura su $\mathcal{A}$ e μ è definita da (1.1), allora*

a) $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu$

b) ogni insieme in $\mathcal{A}$ è μ^*-misurabile.

Dimostrazione. (a) Prendiamo un generico elemento $E \in \mathcal{A}$. Allora per ogni ricoprimento $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}$, poniamo $B_n = E \cap (A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i)$. Allora $B_n \subseteq A_n$, i B_n sono disgiunti e la loro unione è E, quindi $\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$; per l'arbitrarietà del ricoprimento $(A_n)_n$, ne segue che $\mu(E) \leq \mu^*(E)$. La disuguaglianza inversa si ottiene ponendo $A_1 = E$ e $A_n = \emptyset$ per $n \geq 2$: allora $\mu^*(E) \leq \mu(E) + 0$.

(b) Se $A \in \mathcal{A}$, $E \subseteq X$ ed $\varepsilon > 0$, allora esiste un ricoprimento $(B_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ di E tale che $\mu^*(E) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$. Siccome μ è additiva su $\mathcal{A}$, abbiamo che

$$\mu^*(E) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(B_n \cap A) + \mu(B_n \cap A^c)) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

Siccome ε è arbitrario, abbiamo che A é μ^*-misurabile. $\square$

Teorema 1.24 *Sia $\mathcal{A}$ un'algebra, μ una premisura su $\mathcal{A}$ e $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{A})$. Allora esiste una misura $\bar{\mu}$ su $\mathcal{M}$ tale che $\bar{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$. Se μ è σ-finita, allora $\bar{\mu}$ é l'unica estensione di μ ad una misura su $\mathcal{M}$.*

Dimostrazione. Il teorema è una conseguenza del teorema di Caratheodory e della proposizione 1.23: infatti, μ induce una misura esterna μ^* sulla σ-algebra degli insiemi μ^*-misurabili, che contiene $\mathcal{A}$, e quindi contiene $\mathcal{M}$. Inoltre $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu$.

Dimostriamo ora che l'estensione è unica. Supponiamo che ν sia un'altra misura tale che $\nu|_{\mathcal{A}} = \mu$. Prendiamo $E \in \mathcal{M}$ tale che $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, con $A_i \in \mathcal{A}$; allora $\nu(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, e da questo segue che $\nu(E) \leq \bar{\mu}(E)$. Se chiamiamo $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, allora abbiamo che

$$\nu(A) = \lim_{n\to\infty} \nu \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \lim_{n\to\infty} \mu \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \bar{\mu}(A)$$

Se $\bar{\mu}(E) < +\infty$, allora possiamo scegliere gli A_i in modo che $\bar{\mu}(A) < \bar{\mu}(E) + \varepsilon$, cioé $\bar{\mu}(A \setminus E) < \varepsilon$; allora:

$$\bar{\mu}(E) \leq \bar{\mu}(A) = \nu(A) = \nu(E) + \nu(A \setminus E) \leq \nu(E) + \bar{\mu}(A \setminus E) \leq \nu(E) + \varepsilon$$

Siccome ε è arbitrario, segue che $\bar{\mu}(E) = \nu(E)$. Quindi, se μ è σ-finita, abbiamo che $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, con $\mu(A_n) < +\infty$, e possiamo supporre che gli A_n siano disgiunti. Allora per ogni $E \in \mathcal{M}$:

$$\bar{\mu}(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(E \cap A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E \cap A_n) = \nu(E)$$

e quindi $\nu = \bar{\mu}$. □

La dimostrazione del teorema prova più del suo enunciato: infatti ad esempio possiamo notare che se partiamo da uno spazio misurato $(X, \mathcal{M}, \mu)$ ed eseguiamo la costruzione vista in questa sezione, allora la misura esterna μ^* costruita tramite il teorema di Caratheodory può essere ristretta ad una misura sulla σ-algebra $\mathcal{M}^*$ dei μ^*-misurabili che in generale contiene $\mathcal{M}$; se μ è σ-finita, si può provare che $\mathcal{M}^*$ è il completamento di $\mathcal{M}$.

1.3 Misura di Lebesgue e misure di Borel sulla retta reale

In questa sezione costruiremo misure su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Queste misure si chiamano **misure di Borel** su $\mathbb{R}$. Da qui in poi considereremo intervalli aperti a sinistra e chiusi a destra su $\mathbb{R}$, cioé della forma $(a, b]$, oppure $(a, +\infty)$, oppure $\emptyset$, con $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R}$; chiamiamo questi intervalli **h-intervalli** (h sta per half-open). Chiamiamo $\mathcal{A}$ l'algebra generata da tali intervalli, che è possibile esplicitare in questo modo:

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} I_i \mid I_i \text{ h-intervallo} \right\}$$

Ricordiamo che $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Prendiamo ora una funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente. Diciamo che F é **continua a destra** se per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha

$$F(a) = \lim_{x \to a^+} F(x)$$

Inoltre abbiamo che i limiti $F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x)$ e $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x)$ esistono (e possono essere finiti o infiniti). Vogliamo ora definire una misura μ a partire da F in modo che

$$\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$$

Per fare questo, basterà dimostrare che la μ definisce una premisura. Questo, in virtù di quanto dimostrato nella sezione precedente, basterà a costruire la misura. Notiamo che, se poniamo $F(x) = x$, allora otteniamo che $\mu((a, b]) = b - a$. Questa misura sarà quindi l'estensione della "misura" di Riemann che stavamo cercando alla fine della sezione 1.

Proposizione 1.25 *Se F è crescente e c.a d., e poniamo*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i]\right) = \sum_{i=1}^{n} (F(b_i) - F(a_i))$$

per $(a_i, b_i]$ intervalli disgiunti, e $\mu(\emptyset) = 0$; allora μ è una premisura su $\mathcal{A}$.

Dimostrazione. Prima di tutto notiamo che μ è ben definita su $\mathcal{A}$: infatti, se $(I_i)_i$ e $(J_j)_j$ sono famiglie finite di h-intervalli tali che $\bigcup_i I_i = \bigcup_j J_j$, allora abbiamo che $\bigcup_i I_i = \bigcup_{ij}(I_i \cap J_j) = \bigcup_j J_j$, e quindi

$$\mu\left(\bigcup_i I_i\right) = \sum_{ij} \mu(I_i \cap J_j) = \mu\left(\bigcup_j J_j\right)$$

quindi μ è ben definita, ed è finitamente additiva per definizione.

Dobbiamo ora mostrare che se $(I_i)_{i\in\mathcal{N}}$ è una successione di h-intervalli disgiunti tale che $\bigcup_i I_i \in \mathcal{A}$, allora $\mu(\bigcup_i I_i) = \sum_i \mu(I_i)$. Per la finita additività di μ, possiamo supporre che $\bigcup_i I_i = (a, b] = I$; abbiamo allora che per ogni n vale:

$$\mu(I) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^n I_i\right) + \mu\left(I \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i\right) \geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^n I_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(I_i)$$

Otteniamo quindi che $\mu(I) \geq \sum_{i=1}^\infty \mu(I_i)$. Per provare la disuguaglianza inversa, supponiamo all'inizio che $-\infty < a < b < +\infty$, e fissiamo un $\varepsilon > 0$. Siccome F é continua a destra, esiste un $\delta > 0$ tale che $F(a+\delta) - F(a) < \varepsilon$, e se chiamiamo $I_i = (a_i, b_i]$, allora esistono δ_i tali che $F(b_i+\delta_i) - F(b_i) < \varepsilon 2^{-i}$. Gli intervalli aperti $(a_i, b_i+\delta_i)$ coprono l'insieme $[a+\delta, b]$, che è compatto, quindi esiste un ricoprimento finito. Scartando ogni $(a_i, b_i + \delta_i)$ contenuto in uno più grande, ed eventualmente riordinando gli indici i, possiamo supporre che gli intervalli $(a_1, b_1+\delta_1), \dots, (a_N, b_N+\delta_N)$ coprono $[a+\delta, b]$, $a_1 < \dots < a_N$ e $b_i+\delta_i \in (a_{i+1}, b_{i+1}+\delta_{i+1})$ per $i = 1, \dots, N-1$. Allora:

$$\begin{aligned}
\mu(I) &\leq F(b) - F(a+\delta) + \varepsilon \leq F(b_N + \delta_N) - F(a_1) + \varepsilon \leq \\
&= F(b_N + \delta_N) - F(a_N) + \sum_{i=1}^{N-1} (F(a_{i+1}) - F(a_i)) + \varepsilon \leq \\
&\leq F(b_N + \delta_N) - F(a_N) + \sum_{i=1}^{N-1} (F(b_i + \delta_i) - F(a_i)) + \varepsilon \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \mu((a_i, b_i + \delta_i]) + \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(I_i) + 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Dato che ε è arbitrario, nel caso $-\infty < a < b < +\infty$ abbiamo finito. Se $a = -\infty$, ripetiamo l'argomento e otteniamo $F(b) - F(-M) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(I_i) + 2\varepsilon$ per ogni $M < \infty$, e se $b = \infty$, otteniamo $F(M) - F(a) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu(I_i) + 2\varepsilon$. Allora il risultato segue facendo tendere $\varepsilon \to 0$ e $M \to \infty$. $\square$

Teorema 1.26 *Se F è crescente e c.a d., allora esiste un'unica misura μ_F su $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ tale che $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Se G è un'altra funzione crescente e c.a d., allora $\mu_F = \mu_G$ se e solo se $G - F$ è costante. Viceversa, se μ è una misura su*

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *finita su ogni boreliano limitato e definiamo*

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0,x]) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -\mu((x,0]) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

allora F è c.a d. e crescente, e $\mu = \mu_F$. Infine, μ_F si può estendere a una misura completa $\bar{\mu}_F$ che è definita in una σ-algebra che in generale contiene di $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Dimostrazione. Grazie alla proposizione precedente, F definisce una premisura μ_F su $\mathcal{A}$, che è σ-finita (basta scrivere $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(n, n+1]$). Per il teorema di Caratheodory e le sue conseguenze, si può estendere μ_F ad una unica misura (che chiamiamo ancora μ_F) su $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tale che $\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a)$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. Se G è crescente e c.a d., anch'essa induce una misura μ_G; abbiamo che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\mu_F((a,b]) - \mu_G((a,b]) = F(b) - F(a) - G(b) + G(a)$$

e quindi $\mu_F = \mu_G$ su $\mathcal{A}$ se e solo se $F - G$ é costante; da questo segue la prima parte della tesi. Infine, se μ é una misura su $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ finita su ogni boreliano limitato, allora la F definita nel teorema è crescente (perché μ è monotona) e c.a d. (perché μ è continua dall'alto e dal basso), e $\mu = \mu_F$ su ogni intervallo $(a,b]$: ad esempio, se $0 \le a < b$, si ha che $\mu((a,b]) = \mu((0,b]) - \mu((0,a]) = F(b) - F(a) = \mu_F((a,b])$ (allo stesso modo si fanno i casi $a < 0 \le b$ e $a < b < 0$). □

Facciamo ora alcune note. Intanto, la teoria costruita finora si sarebbe potuta ottenere anche considerando intervalli del tipo $[a,b)$ e funzioni F continue a sinistra. Inoltre, se μ è una misura finita su $\mathbb{R}$, e poniamo $F(x) = \mu((-\infty, x])$, allora $\mu = \mu_F$. La F si chiama allora **funzione di distribuzione cumulativa** di μ. Queste misure vengono comunemente chiamate **misura di Lebesgue-Stieltjes**.

Esempio 1.27 (misura di Lebesgue) Se $F(x) = x$, allora otteniamo che $\mu((a,b]) = b - a$. Questa misura coincide con l'usuale misura di Riemann su $\mathcal{A}$ (ma ricordiamo che ha come dominio $\mathcal{B}(\mathbb{R})$) e si chiama **misura di Lebesgue**. Notiamo inoltre che $\mu([a,b]) = b-a$: infatti $[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(a - 1/n, b]$, e in particolare $(a - 1/n, b] \searrow [a,b]$, quindi $\mu([a,b]) = \lim_{n\to\infty} \mu((a - 1/n, b]) = b - a + 1/n = b - a$. In modo simile si dimostra che $\mu([a,b)) = \mu((a,b)) = b - a$.

Facciamo poi notare che che il dominio di $\bar{\mu}_F$ in generale contiene $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Per vedere questo in un caso semplice, basta considerare la funzione $F = \mathbf{1}_{\{x \ge 0\}}$. Allora $\mu_F = \delta_0$ è la delta di Dirac nel punto 0 e il completamento é definito su tutta la σ-algebra $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Infatti abbiamo che $\delta_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = 0$, quindi è possibile estendere δ_0 ad ogni sottoinsieme di $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ assegnandogli misura nulla. Questo esempio può sembrare una patologia, ma questo fenomeno riguarda tutte le misure usate comunemente, e in particolare la misura di Lebesgue m. Infatti anche essa può essere estesa ad una σ-algebra (che chiameremo $\mathcal{L}$) più grande di $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Un esempio famoso di insiemi misurabili non boreliani è fornito nel capitolo 3 sezione 1.

Nel seguito indicheremo la misura di Lebesgue con m. Diamo ora un altro risultato (che non dimostreremo) sulla misura di Lebesgue.

Teorema 1.28 *Se $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, e $r, s \in \mathbb{R}$, poniamo $E+s = \{x+s \mid x \in E\}$ e $rE = \{rx \mid x \in E\}$; allora $E + s, rE \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ e $m(E + s) = m(E)$, $m(rE) = |r|m(E)$.*

Capitolo 2

Integrazione

Nella teoria dell'integrazione di Riemann su $\mathbb{R}$, $\int_a^b f(x)\ dx$ é definito come limite delle somme di Riemann, che sono gli integrali di funzioni costanti sui sottointervalli di $[a,b]$. Nella teoria dell'integrazione di Lebesgue, vedremo che $\int_X f(x)\ d\mu(x)$ sarà costruito come limite di integrali di funzioni costanti su insiemi misurabili di X. Siccome abbiamo visto che gli insiemi misurabili secondo Lebesgue possono avere una forma più complessa degli insiemi misurabili secondo Riemann, possiamo estendere l'integrale ad una classe più generale di funzioni. Inoltre costruiremo l'integrale concentrando la nostra attenzione su funzioni a valori reali; notiamo però che la teoria può essere formulata comprendendo anche funzioni a valori complessi o in $\mathbb{R}^n$.

2.1 Funzioni misurabili

Definizione 2.1 *Se $(X,\mathcal{M})$ e $(Y,\mathcal{N})$ sono spazi misurabili, una funzione $f : X \to Y$ si dice* $(\mathcal{M},\mathcal{N})$**-misurabile***, o più semplicemente* **misurabile** *se $\mathcal{M}$ ed $\mathcal{N}$ sono chiari dal contesto, se $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ per ogni $E \in \mathcal{N}$.*

Quando la funzione f è a valori in $\mathbb{R}$, si usa una terminologia particolare: abbiamo infatti visto che su $\mathbb{R}$ le σ-algebre più comunemente usate sono due, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{L}$, che è il suo completamento rispetto alla misura di Lebesgue. Per questo motivo, si usa questa terminologia quando si parla di funzioni reali.

Definizione 2.2 *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diciamo che f è* **boreliana** *se é $(\mathcal{B}(\mathbb{R}),\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-misurabile, e diciamo più genericamente che f é* **misurabile** *(secondo Lebesgue) se è $(\mathcal{L},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-misurabile.*

É ovvio che la composizione di funzioni misurabili (secondo la terminologia della definizione 2.1) è misurabile; cioé, se $f : X \to Y$ è $(\mathcal{M},\mathcal{N})$-misurabile e $g : Y \to Z$ é $(\mathcal{N},\mathcal{O})$-misurabile, allora $g \circ f : X \to Z$ é $(\mathcal{M},\mathcal{O})$-misurabile. Notiamo poi che se $f : X \to Y$ e $(Y,\mathcal{N})$ é uno spazio misurabile, allora si può rendere f misurabile costruendo la σ-algebra $\mathcal{M} = f^{-1}(\mathcal{N})$ su X, dove $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ è la mappa inversa di f, definita da $f^{-1}(F) = \{x \in X \mid f(x) \in F\}$. Infatti f^{-1} commuta con unioni, intersezioni e complementi, quindi $\mathcal{M}$ è una σ-algebra.

Le cose cambiano se si considerano funzioni reali: secondo la definizione 2.2, una funzione boreliana è anche misurabile secondo Lebesgue, ma non viceversa. Inoltre se f e g sono due funzioni misurabili, non è detto che $f \circ g$ lo sia. Se però f é boreliana, allora $f \circ g$ ha la stessa misurabilità di g.

Proposizione 2.3 *Se $\mathcal{N} = \sigma(\mathcal{E})$, allora f è $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-misurabile se e solo se $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$ per ogni $E \in \mathcal{E}$.*

Dimostrazione. L'implicazione "solo se" è banale. Per l'inverso, osserviamo che la classe $\{E \in Y \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}$ è una σ-algebra che contiene $\mathcal{E}$, quindi contiene anche $\mathcal{N}$. □

Corollario 2.4 *Se X e Y sono spazi topologici, allora ogni funzione continua $f : X \to Y$ è anche $(\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y))$-misurabile.*

Dimostrazione. f è continua se e solo se $f^{-1}(U)$ è aperto in X per ogni aperto $U \subseteq Y$; siccome $\mathcal{B}(Y)$ è generata dagli aperti di Y, la tesi segue dalla proposizione 2.3. □

Proposizione 2.5 *$f : X \to \mathbb{R}$ è $\mathcal{M}$-misurabile se e solo se una delle 4 condizioni equivalenti qui sotto è verificata:*

1. $f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{M}\ \forall a \in \mathbb{R}$
2. $f^{-1}([a, \infty)) \in \mathcal{M}\ \forall a \in \mathbb{R}$
3. $f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{M}\ \forall a \in \mathbb{R}$
4. $f^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{M}\ \forall a \in \mathbb{R}$

Dimostrazione. Segue dalla proposizione 2.3 e dal fatto che gli insiemi (a, ∞) (cosí come quelli degli altri 3 tipi) generano $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. □

Definizione 2.6 *Se X è un insieme, $(Y_\alpha, \mathcal{N}_\alpha)$ sono spazi misurabili e $f_\alpha : X \to Y_\alpha$ sono funzioni, per $\alpha \in A$, allora si dice* **σ-algebra generata dalle** *$(f_\alpha)_\alpha$ la σ-algebra $\mathcal{M} = \sigma(f_\alpha^{-1}(E_\alpha) \mid E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha, \alpha \in A)$. Essa si indica anche con $\sigma(f_\alpha)$, ed è la più piccola σ-algebra tale che le $(f_\alpha)_\alpha$ siano tutte misurabili.*

Un esempio molto importante di σ-algebra generata è quello di σ-algebra prodotto. Supponiamo di avere gli spazi misurabili $(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha)$, dove $\alpha \in A$ è un parametro, e di volere costruire una struttura di spazio misurabile sullo spazio prodotto $X = \Pi_{\alpha \in \mathcal{A}} X_\alpha$. Nel seguito chiamiamo $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ la proiezione sulla α-esima coordinata.

Definizione 2.7 *Si chiama* σ**-algebra prodotto** *la* σ*-algebra*

$$\mathcal{M} = \bigotimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha = \sigma\{\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) \mid E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha, \alpha \in A\}$$

La σ*-algebra prodotto è quindi uguale alla* σ*-algebra generata dalle proiezioni sulle coordinate. Se gli spazi* $(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha)$ *sono tutti uguali a un* $(X, \mathcal{M})$*, la* σ*-algebra prodotto si può anche indicare con* $\mathcal{M}^{\otimes A}$*. Se poi* $A = \{1, \ldots, n\}$*, allora la* σ*-algebra prodotto si può anche indicare con* $\mathcal{M}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{M}_n$ *o con* $\mathcal{M}^{\otimes n}$*.*

Proposizione 2.8 *Se* A *è finito o numerabile, allora* $\otimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$ *è generata da* $\{\Pi_{\alpha \in A} E_\alpha \mid E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha\}$

Dimostrazione. Abbiamo che $\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha) = \Pi_{\beta \in A} E_\beta$, con $E_\beta = X_\beta$ per $\beta \neq \alpha$, quindi $\otimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$ è contenuta in $\sigma\{\Pi_{\alpha \in A} E_\alpha \mid E_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha\}$. D'altra parte, $\Pi_{\alpha \in A} E_\alpha = \bigcap_{\alpha \in A} \pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)$. Siccome questa è un'intersezione numerabile, allora $\Pi_{\alpha \in A} E_\alpha \in \otimes_{\alpha \in A} \mathcal{M}_\alpha$. □

Corollario 2.9 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes n}$.

Vediamo ora un importante risultato sugli spazi prodotto.

Proposizione 2.10 *Siano* $(X, \mathcal{M})$*,* $(Y_\alpha, \mathcal{N}_\alpha)$ *(*$\alpha \in A$*) spazi misurabili, e poniamo* $Y = \prod_\alpha Y_\alpha$*,* $\mathcal{N} = \otimes_\alpha \mathcal{N}_\alpha$*, e* $\pi_\alpha : Y \to Y_\alpha$ *la proiezione canonica; allora* $f : X \to Y$ *è* $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$*-misurabile se e solo se* $\pi_\alpha \circ f$ *é* $(\mathcal{M}, \mathcal{N}_\alpha)$*-misurabile per ogni* $\alpha \in A$*.*

Dimostrazione. Se f è misurabile, allora anche le $\pi_\alpha \circ f$ lo sono, perché composizioni di funzioni misurabili. Viceversa, se le $\pi_\alpha \circ f$ sono misurabili, questo significa che $f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)) \in \mathcal{M}$; siccome $\mathcal{N}$ è generata da $\pi_\alpha^{-1}(E_\alpha)$, la tesi segue dalla proposizione 2.3. □

Corollario 2.11 *Se* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *sono misurabili, allora anche* $f + g$ *e* fg *lo sono.*

Dimostrazione. Definiamo $F : X \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\varphi, \psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come $F = (f, g)$, $\varphi(x, y) = x + y$ e $\psi(x, y) = xy$. Allora, siccome $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes 2}$, F è misurabile; inoltre φ e ψ sono continue, quindi sono misurabili. Siccome infine $f + g = \varphi \circ F$ e $fg = \psi \circ F$ sono composizioni di funzioni misurabili, allora sono misurabili. □

La proposizione 2.10 ha quindi la conseguenza che le funzioni misurabili su $\mathbb{R}$ formano un'algebra. Vediamo ora come le funzioni misurabili conservino anche la strutture di limite su $\mathbb{R}$. Per fare questo ci servirà considerare funzioni sulla retta reale estesa. Prendiamo lo spazio $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$. Questo ha una sua topologia (ad esempio considerando $\bar{\mathbb{R}}$ come spazio metrico, dotato della metrica $\rho(x, y) = |\text{arctg } y - \text{arctg } x|$), e quindi si può definire la σ-algebra $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ (si può verificare che $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$ è generata dagli insiemi $(a, \infty]$ o dagli insiemi $[-\infty, a)$). Diciamo che $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ è misurabile se è $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$-misurabile. Allora le conseguenze della proposizione 2.10 (e in particolare il corollario 2.11) rimangono valide anche per funzioni a valori in $\bar{\mathbb{R}}$, a condizione di fare attenzione alle espressioni indeterminate come $\infty - \infty$ (l'espressione $0 \cdot \infty$ di solito in teoria della misura si pone uguale a 0 per convenzione).

Proposizione 2.12 *Se $(f_n)_n$ è una successione di funzioni misurabili a valori in $\bar{\mathbb{R}}$ su $(X, \mathcal{M})$, allora le funzioni*

$$g_1(x) = \sup_n f_n(x), \quad g_2(x) = \inf_n f_n(x), \quad g_3(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x), \quad g_4(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$$

sono misurabili. Se poi $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ esiste per ogni $x \in X$, allora è misurabile.

Dimostrazione. Abbiamo $g_1^{-1}((a, \infty]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}((a, \infty])$, e $g_2^{-1}([-\infty, a)) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}([-\infty, a))$. Siccome l'unione e l'intersezione sopra sono numerabili, allora g_1 e g_2 sono misurabili. Allo stesso modo abbiamo che g_3 e g_4 sono misurabili perché $g_3 = \inf_n \sup_{j\geq n} f_j$ e $g_4 = \sup_n \inf_{j\geq n} f_j$. Infine, se f esiste, allora si ha che $f = g_3 = g_4$, e quindi f é misurabile. $\square$

Corollario 2.13 *Se $f, g : X \to \bar{\mathbb{R}}$ sono misurabili, allora anche $\max(f, g)$ e $\min(f, g)$ lo sono.*

A questo punto possiamo presentare una utile decomposizione di funzioni: se $f : X \to \mathbb{R}$, definiamo **parte positiva** e **parte negativa di** f le funzioni

$$f^+(x) = \max(f(x), 0), \qquad f^-(x) = -\min(f(x), 0)$$

Allora $f = f^+ - f^-$; inoltre, se f è misurabile, allora anche f^+ ed f^- lo sono. Grazie a questa decomposizione, possiamo nel seguito limitarci a lavorare con funzioni reali a valori positivi.

Presentiamo ora degli esempi molto importanti di funzioni misurabili. Se $(X, \mathcal{M})$ è uno spazio misurabile, e $E \in \mathcal{M}$, definiamo **funzione caratteristica** di E (o anche **funzione indicatrice**) la funzione

$$\chi_E(x) = \mathbf{1}_E(x) = I_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

Chiamiamo poi **funzione semplice** una combinazione lineare finita (a coefficienti reali) di funzioni caratteristiche. Allora una funzione semplice è della forma $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{E_i}(x)$. Tuttavia φ può essere rappresentata in vari modi, e in particolare possiamo avere che $a_i = a_j$ per $i \neq j$. Se però abbiamo Imm $(\varphi) = \{a_1, \ldots, a_n\}$ e poniamo $E_i = \varphi^{-1}(\{a_i\})$, allora possiamo rappresentare φ come $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{E_i}(x)$, con $a_i \neq a_j$ per $i \neq j$. Questa si chiama **rappresentazione standard** di φ.

É chiaro che se φ e ψ sono funzioni semplici, allora anche $\varphi + \psi$ e $\varphi\psi$ lo sono. Vediamo ora come le funzioni semplici possono approssimare le funzioni misurabili.

Teorema 2.14 *Se $(X, \mathcal{M})$ è uno spazio misurabile, e $f : X \to [0, \infty]$ é misurabile, allora esiste una successione di funzioni semplici $(\varphi_n)_n$ tali che $0 \le \varphi_1 \le \ldots \le \varphi_n \le \ldots \le f$, $\varphi_n \to f$ puntualmente, e $\varphi_n \to f$ uniformemente su ogni insieme su cui f è limitata.*

Dimostrazione. Prendiamo $n \in \mathcal{N}$ e definiamo per ogni k tra 0 e $2^{2n} - 1$,

$$E_n^k = f^{-1}((k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]), \quad F_n = f^{-1}((2^n, \infty])$$

Definiamo poi

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} k2^{-n}\mathbf{1}_{E_n^k}(x) + 2^n\mathbf{1}_{F_n}(x)$$

Allora si ha facilmente che $\varphi_n \le \varphi_{n+1}$ per ogni n, e che $0 \le f - \varphi_n \le 2^{-n}$ sugli insiemi in cui $f \le 2^n$. Il risultato segue facilmente. □

Se $(X, \mathcal{M}, \mu)$ è uno spazio misurabile, a volte potrebbe farci comodo studiare le funzioni misurabili trascurando gli insiemi di misura nulla. Vediamo nei due risultati che seguono (senza dimostrazione) che se $\mathcal{M}$ é completa rispetto a μ, allora la cosa si può fare facilmente.

Proposizione 2.15 *Se $\mathcal{M}$ è completa rispetto a μ, allora:*

a) se f è misurabile e $f = g$ q.o., allora anche g é misurabile

b) se le $(f_n)_n$ sono misurabili e $f_n \to f$ q.o., allora f è misurabile.

Avevamo visto che se le $(f_n)_n$ sono misurabili e convergono a f ovunque, allora anche f è misurabile. La proposizione che abbiamo appena visto permette di dire che il risultato vale anche se invece di una convergenza certa si ha una convergenza quasi certa. Nella prossima proposizione vediamo che, anche se μ non è completa, non ci si deve preoccupare troppo.

Proposizione 2.16 *Se $(X, \mathcal{M}, \mu)$ è uno spazio misurabile, e $(X, \bar{\mathcal{M}}, \bar{\mu})$ é il suo completamento, e se f è $\bar{\mathcal{M}}$-misurabile, allora esiste una funzione $\mathcal{M}$-misurabile g tale che $g = f$ $\bar{\mu}$-quasi ovunque.*

2.2 Integrazione di funzioni non negative

In questa sezione fissiamo uno spazio misurato $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e chiamiamo $L^+ = L^+(X, \mathcal{M}, \mu)$ lo spazio delle funzioni misurabili da X a $[0, \infty]$.

Definizione 2.17 *Se φ è una funzione semplice in L^+ con rappresentazione standard $\sum_{i=1}^n a_i\mathbf{1}_{E_i}$, definiamo l'**integrale** di φ su X rispetto a μ come*

$$\int_X \varphi \, d\mu = \int_X \varphi(x) \, \mu(dx) = \int_X \varphi(x) \, d\mu(x) = \sum_{i=1}^n a_i\mu(E_i)$$

con la solita convenzione che $0 \cdot \infty = 0$. Notiamo che $\int_X \varphi \, d\mu$ può essere uguale a $+\infty$. Se $A \in \mathcal{M}$, definiamo l'integrale di φ su A come $\int_A \varphi \, d\mu = \int_X \mathbf{1}_A\varphi \, d\mu$.

Esempio 2.18 Se $(X, \mathcal{M}, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), m_n)$, dove m_n è la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$, allora l'integrale di φ si indica semplicemente come

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\ dm_n(x)$$

Notiamo che l'integrale di Lebesgue coincide con quello di Riemann sulle funzioni semplici $\sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{E_i}$, con E_i unioni finite di rettangoli.

Proposizione 2.19 *Se φ e ψ sono funzioni semplici in L^+, allora:*

a) se $c \geq 0$, allora $\int_X c\varphi\ d\mu = c \int_X \varphi\ d\mu$

b) $\int_X (\varphi + \psi)\ d\mu = \int_X \varphi\ d\mu + \int_X \psi\ d\mu$

*c) se $\varphi \leq \psi$, allora $\int_X \varphi\ d\mu \leq \int_X \psi\ d\mu$ (**monotonia**)*

d) la funzione $A \to \int_A \varphi\ d\mu$ è una misura su $\mathcal{M}$

Dimostrazione. a) basta applicare la definizione di integrale

b) prendiamo le rappresentazioni standard $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{E_i}$ e $\varphi = \sum_{j=1}^m a_j \mathbf{1}_{F_j}$. Siccome $E_i = \bigcup_{j=1}^m E_i \cap F_j$ e $F_j = \bigcup_{i=1}^n E_i \cap F_j$, e le unioni sono disgiunte, l'additività finita di μ implica

$$\begin{aligned}
\int_X (\varphi + \psi)\ d\mu &= \int_X \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (a_i + b_j) \mathbf{1}_{E_i \cap F_j}\ d\mu = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (a_i + b_j) \mu(E_i \cap F_j) = \\
&= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i \cap F_j) + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_j \mu(E_i \cap F_j) = \\
&= \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i) + \sum_{j=1}^m b_j \mu(F_j) = \int_X \varphi\ d\mu + \int_X \psi\ d\mu
\end{aligned}$$

c) se $\varphi \leq \psi$, allora $a_i \leq b_j$ ogni volta che $E_i \cap F_j \neq \emptyset$, quindi

$$\int_X \varphi\ d\mu = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i \cap F_j) \leq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_j \mu(E_i \cap F_j) = \int_X \psi\ d\mu$$

d) l'unica cosa da provare è l'additività numerabile: se $(A_j)_j$ sono disgiunti e chiamiamo $A = \bigcup_{j=1}^\infty A_j$, allora

$$\int_A \varphi\ d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A \cap E_i) = \sum_{j=1}^\infty \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_j \cap E_i) = \sum_{j=1}^\infty \int_{A_j} \varphi\ d\mu$$

□

I punti (a) e (b) della proposizione ci dicono che l'integrale è una funzione lineare da L^+ in $\mathbb{R}$. Estendiamo ora l'integrale a tutte le funzioni in L^+.

Definizione 2.20 *Se f è una funzione in L^+, definiamo l'***integrale** *di f su X rispetto a μ come*
$$\int_X f\ d\mu = \sup\left\{ \int_X \varphi\ d\mu \ \middle|\ \varphi \text{ semplice}, 0 \leq \varphi \leq f \right\}$$

Per la proposizione 2.19(c), le due definizioni di $\int_X f\ d\mu$ coincidono quando f è semplice. Inoltre, la proposizione 2.19 resta valida nei punti (a) e (c) (che si dimostrano usando la definizione di integrale) anche se le φ e ψ non sono semplici, ma in L^+. Vediamo ora i teoremi fondamentali della teoria dell'integrazione secondo Lebesgue.

Teorema 2.21 (di Beppo Levi, o della convergenza monotona) *Se $(f_n)_n$ è una successione di funzioni in L^+ tale che $f_n \leq f_{n+1}$ per ogni n, e $f = \lim_{n\to\infty} f_n (= \sup_n f_n)$, allora $\int_X f\ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\ d\mu$.*

Dimostrazione. La successione reale $(\int_X f_n\ d\mu)_n$ è monotona, quindi ha limite (anche uguale a $+\infty$). Inoltre, $\int_X f_n\ d\mu \leq \int_X f\ d\mu$ per ogni n, quindi $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\ d\mu \leq \int_X f\ d\mu$. Per la disuguaglianza inversa, fissiamo $\alpha \in (0, 1)$, prendiamo una funzione semplice φ tale che $0 \leq \varphi \leq f$, e poniamo $E_n = \{x \mid f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\}$. Allora $(E_n)_n$ è una successione crescente di insiemi misurabili la cui unione è X, e abbiamo $\int_X f_n\ d\mu \geq \int_{E_n} f_n\ d\mu \geq \alpha \int_{E_n} \varphi\ d\mu$. Per la proposizione 2.19 e la continuità dal basso delle misure, abbiamo che $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \varphi\ d\mu = \int_X \varphi\ d\mu$, quindi $\int_X f_n\ d\mu \geq \alpha \int_X \varphi\ d\mu$. Siccome questo è vero per ogni $\alpha < 1$, allora è vero anche per $\alpha = 1$. Prendendo poi l'estremo superiore sulle φ semplici minori di f, si ottiene che $\int_X f_n\ d\mu \geq \alpha \int_X f\ d\mu$. $\square$

Possiamo ora dimostrare l'additività dell'integrale.

Teorema 2.22 *Se $(f_n)_n$ è una successione finita o infinita in L^+ e $f = \sum_n f_n$, allora $\int_X f\ d\mu = \sum_n \int_X f_n\ d\mu$.*

Dimostrazione. Consideriamo all'inizio due funzioni f_1 e f_2. Per il teorema 2.14 possiamo trovare due successioni crescenti $(\varphi_n)_n$ e $(\psi_n)_n$ di funzioni positive semplici che tendono a f_1 e f_2. Allora $(\varphi_n + \psi_n)_n$ è una successione crescente che tende a $f_1 + f_2$, e per il teorema di Beppo Levi:

$$\begin{aligned}
\int_X (f_1 + f_2)\ d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_X (\varphi_n + \psi_n)\ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n\ d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_X \psi_n\ d\mu = \\
&= \int_X f_1\ d\mu + \int_X f_2\ d\mu
\end{aligned}$$

Per induzione si ha che $\int_X (\sum_{n=1}^N f_n)\ d\mu = \sum_{n=1}^N \int_X f_n\ d\mu$, e quindi facendo tendere $N \to \infty$ e applicando ancora Beppo Levi, si ottiene la tesi. $\square$

Vediamo ora un risultato, che darà anche una leggera generalizzazione del teorema di Beppo Levi.

Proposizione 2.23 *Se $f \in L^+$, allora $\int_X f\ d\mu = 0$ se e solo se $f = 0$ q.o. Inoltre, se $\int_X f\ d\mu < +\infty$, allora l'insieme $E = \{x \mid f(x) = +\infty\}$ è trascurabile.*

Dimostrazione. Se f è semplice, questo è ovvio: se $f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{E_i}$, con $a_i \geq 0$, allora si ha che $\int_X f \, d\mu = 0$ se e solo se per ogni i si ha che $a_i = 0$ oppure che $\mu(E_i) = 0$. In generale, se $f = 0$ q.o. e φ è una funzione semplice tale che $0 \leq \varphi \leq f$, allora $\varphi = 0$ q.o., quindi $\int_X f \, d\mu = \sup_n \int_X \varphi \, d\mu = 0$. Viceversa, abbiamo che $\{x \mid f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$, dove $E_n = \{x \mid f(x) > 1/n\}$, quindi se fosse falso che $f = 0$ q.o., dovremmo avere che $\mu(E_n) > 0$ per qualche n. Ma siccome $f > \mathbf{1}_{E_n}/n$, allora $\int_X f \, d\mu > \mu(E_n)/n > 0$, e abbiamo una contraddizione. Per la seconda parte, basta notare che $f > +\infty \mathbf{1}_E$, quindi $\int_X f \, d\mu > \int_X \infty \mathbf{1}_E \, d\mu = \infty \mu(E)$. Ma siccome $\int_X f \, d\mu < +\infty$, allora bisogna avere per forza che $\mu(E) = 0$. $\square$

Corollario 2.24 *Se $(f_n)_n$ è una successione in L^+, $f \in L^+$ e $f_n \nearrow f$ q.o., allora $\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$.*

Dimostrazione. Se $E \in \mathcal{M}$ è tale che $\mu(E^c) = 0$, allora $f = f\mathbf{1}_E$ q.o. e $f_n = f_n \mathbf{1}_E$ q.o.; se poi $f_n \nearrow f$ su un tale E, allora si ha che $\int_X f \, d\mu = \int_X f\mathbf{1}_E d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathbf{1}_E d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$. $\square$

Nota 2.25 Se $\mathcal{M}$ è completa rispetto a μ, l'ipotesi $f \in L^+$ si ottiene automaticamente dal fatto che $(f_n)_n \subseteq L^+$ e dalla proposizione 2.15.

L'ipotesi che la successione delle f_n sia crescente è essenziale per il teorema di Beppo Levi. Infatti, se ad esempio prendiamo $(X, \mathcal{M}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m_1)$ (dove m_1 è la misura di Lebesgue), abbiamo che $\mathbf{1}_{(n,n+1)} \to 0$ puntualmente, ma $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{(n,n+1)}(x) \, dx = 1$ per ogni n, quindi il teorema di Beppo Levi in questo caso non è verificato. Abbiamo però questo risultato.

Lemma 2.26 (di Fatou) *Se $(f_n)_n$ è una successione in L^+, allora*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

Dimostrazione. Per ogni k abbiamo che $\inf_{n\geq k} f_n \leq f_j$ per ogni $j \geq k$, quindi $\int_X \inf_{n\geq k} f_n \, d\mu \leq \int_X f_j \, d\mu$; da qui $\int_X \inf_{n\geq k} f_n \, d\mu \leq \inf_{j\geq k} \int_X f_j \, d\mu$. Se ora si fa tendere $k \to \infty$ e si applica il teorema della convergenza monotona, si ha:

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \int_X \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k} f_n \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X \inf_{n\geq k} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

$\square$

2.3 Integrale di funzioni reali

Estendiamo ora l'integrale a funzioni misurabili reali.

Definizione 2.27 *Sia f una funzione misurabile reale. Se f^+ e f^- sono rispettivamente la parte positiva e la parte negativa di f, e almeno uno tra $\int_X f^+ \, d\mu$ e $\int_X f^- \, d\mu$ é finito, definiamo* **integrale di** *f il numero*

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu$$

che può quindi essere anche uguale a $+\infty$ o a $-\infty$. Se però l'integrale di f è un numero finito, allora diciamo che f é **integrabile**.

Notiamo che $f^+, f^- \leq |f| \leq f^+ + f^-$; da questo si deduce che f è integrabile se e solo se $\int_X |f| \, d\mu < +\infty$.

Proposizione 2.28 *L'insieme delle funzioni reali integrabili è uno spazio vettoriale reale, e l'integrale è un funzionale reale su di esso. Infine, se f è integrabile, allora $|\int_X f \, d\mu| \leq \int_X |f| \, d\mu$.*

Dimostrazione. La prima parte della tesi segue dal fatto che si ha $|af+bg| \leq |a||f|+|b||g|$. Per la seconda parte, si può dimostrare che $a\int_X f \, d\mu = \int_X af \, d\mu$ usando la proposizione (2.19)(a). Inoltre, se f e g sono integrabili, e chiamiamo $h = f + g$, allora $h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$, quindi $h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$. Per il teorema (2.22), si ha

$$\int_X h^+ \, d\mu + \int_X f^- \, d\mu + \int_X g^- \, d\mu = \int_X h^- \, d\mu + \int_X f^+ \, d\mu + \int_X g^+ \, d\mu$$

e da questo segue che $\int_X h \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$. Infine abbiamo che

$$\left|\int_X f \, d\mu\right| = \left|\int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu\right| \leq \int_X f^+ \, d\mu + \int_X f^- \, d\mu = \int_X |f| \, d\mu$$

□

Proposizione 2.29 *Se f e g sono integrabili, allora sono equivalenti:*

i) $\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu$ *per ogni* $E \in \mathcal{M}$

ii) $\int_X |f - g| \, d\mu = 0$

iii) $f = g$ *q.o.*

Dimostrazione. L'equivalenza $(ii) \iff (iii)$ segue dal fatto che $|f - g|$ è una funzione positiva e dalla proposizione 2.23. Inoltre, se $\int_X |f - g| \, d\mu = 0$, allora per ogni $E \in \mathcal{M}$ si ha che

$$\left|\int_E f \, d\mu - \int_E g \, d\mu\right| \leq \int_X \mathbf{1}_E |f - g| \, d\mu \leq \int_X |f - g| \, d\mu = 0$$

e quindi $(ii) \Rightarrow (i)$. D'altra parte, se è falso che $f = g$ q.o., e chiamiamo $h = f - g$, allora h^+ o h^- deve essere diversa da zero in un insieme non trascurabile. Se ad esempio

$E = \{x \mid h^+(x) > 0\}$ è non trascurabile, allora $\int_E f\ d\mu - \int_E g\ d\mu = \int_E h^+\ d\mu > 0$, poiché $h^- = 0$ su E, e abbiamo una contraddizione. Questo prova che $(i) \Rightarrow (iii)$. $\square$

Questa proposizione mostra che l'integrale non cambia se cambiamo la funzione su insiemi di misura nulla. Questo significa che possiamo integrare delle funzioni f definite solo su insiemi E il cui complementare è trascurabile, semplicemente definendo $f = 0$ (o qualsiasi altra cosa) su E^c. Possiamo quindi trattare, per quanto riguarda l'integrazione, le funzioni a valori in $\bar{\mathbb{R}}$ che siano finite q.o. semplicemente come funzioni reali.

Definizione 2.30 *Definiamo $L^1 = L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ l'insieme delle classi di equivalenza delle funzioni integrabili su X rispetto a μ, dove $f \equiv g$ se e solo se $f = g$ μ-q.o.*

Come lo spazio delle funzioni integrabili, questo spazio è uno spazio vettoriale reale, ed è anche uno spazio normato rispetto alla norma $\|f - g\|_{L^1} = \int_X |f - g|\ d\mu$. Pur essendo L^1 uno spazio definito come classe di equivalenza di funzioni, useremo lo stesso la notazione $f \in L^1$ per indicare che f è una funzione integrabile definita q.o. Questo leggero abuso di notazione é universalmente accettato e non causa quasi mai ambiguità.

Presentiamo ora l'ultimo dei tre più importanti teoremi di convergenza dell'integrazione secondo Lebesgue.

Teorema 2.31 (della convergenza dominata di Lebesgue) *Se $(f_n)_n \subset L^1$ tale che $f_n \to f$ q.o. ed esiste $g \in L^1$ tale che $|f_n| \leq g$ per ogni n, allora $f \in L^1$ e $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\ d\mu = \int_X f\ d\mu$.*

Dimostrazione. Per le proposizioni 2.15 e 2.16, f è misurabile (eventualmente dopo una ridefinizione su un insieme di misura nulla); inoltre $|f| \leq g$ q.o., quindi $f \in L^1$. Inoltre q.o. abbiamo che $g + f_n \geq 0$ e $g - f_n \geq 0$, quindi per il lemma di Fatou:

$$\begin{aligned}
\int_X g\ d\mu + \int_X f\ d\mu &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (g + f_n)\ d\mu = \int_X g\ d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\ d\mu \\
\int_X g\ d\mu - \int_X f\ d\mu &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (g - f_n)\ d\mu = \int_X g\ d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\ d\mu
\end{aligned}$$

quindi $\liminf_n \int_X f_n\ d\mu \geq \int_X f\ d\mu \geq \limsup_n \int_X f_n\ d\mu$, e segue la tesi. $\square$

Una applicazione di questo teorema è il seguente risultato, che é una estensione del teorema 2.22.

Teorema 2.32 *Se $(f_n)_n$ è una successione in L^1 tale che $\sum_{n=1}^\infty \int_X |f_n|\ d\mu < +\infty$, allora $\sum_{n=1}^\infty f_n$ converge q.o. a una funzione in L^1, e $\sum_{n=1}^\infty \int_X f_n\ d\mu = \int_X (\sum_{n=1}^\infty f_n)\ d\mu$.*

Dimostrazione. Per il teorema 2.22, $\int_X (\sum_{n=1}^\infty |f_n|)\ d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_X |f_n|\ d\mu < +\infty$, quindi $\sum_{n=1}^\infty |f_n| \in L^1$. In particolare, per la proposizione 2.23, $\sum_{n=1}^\infty |f_n(x)|$ è finita per q.o. x, e quindi per ognuno di questi x la serie $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ converge. Inoltre, $|\sum_{n=1}^N f_n| \leq \sum_{n=1}^N |f_n|$ per ogni N, quindi possiamo applicare il teorema della convergenza dominata e ottenere $\sum_{n=1}^\infty \int_X f_n\ d\mu = \int_X (\sum_{n=1}^\infty f_n)\ d\mu$. $\square$

Corollario 2.33 *Lo spazio L^1 è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Rimane solo da provare che se una successione $(f_n)_n \subset L^1$ é di Cauchy rispetto alla norma $\|\cdot\|_{L^1}$ allora converge ad una $f \in L^1$. Definiamo

$$n_k = \min\{n \mid \|f_m - f_{m'}\|_{L^1} < 2^{-k} \ \forall m, m' \geq n\}$$

e poniamo $g_1 = f_{n_1}$ e $g_k = f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$ per $k > 1$. Allora $\sum_{i=1}^{k} g_i = f_{n_{k+1}}$, e

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_X |g_k| \, d\mu \leq \|f_{n_1}\|_{L^1} + \sum_{k=2}^{\infty} 2^{-k} = \|f_{n_1}\|_{L^1} + 1 < +\infty$$

e quindi per il teorema 2.32 esiste una $f \in L^1$ tale che

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} g_k = \lim_{k \to \infty} f_{n_k}$$

Siccome $(f_n)_n$ è di Cauchy, si ha che $f_n \to f$ in L^1; infatti $\forall \varepsilon \exists n$ tale che $\|f_m - f_{m'}\|_{L^1} < \varepsilon$ per ogni $m, m' \geq n$. Allora basta porre $m' = 2^{-k}$, e fare tendere $k \to \infty$, e si ha che $\forall \varepsilon \exists n$ tale che $\|f_m - f\|_{L^1} < \varepsilon$ per ogni $m \geq n$, e quindi abbiamo la tesi. □

2.4 Convergenza in misura

Se $(f_n)_n$ è una successione di funzioni misurabili, abbiamo visto che ci sono diversi tipi di convergenze; in particolare abbiamo già incontrato la convergenza quasi ovunque e la convergenza in L^1. Possiamo inoltre notare che se $f_n \to f$ q.o. e $|f_n| \leq g$, allora il teorema della convergenza dominata implica $f_n \to f$ in L^1; infatti $(f_n - f)_n$ è una successione dominata da $2g$ e che converge q.o. a zero. Ora introduciamo un altro tipo di convergenza, che permetterà di passare dalla convergenza in L^1 alla convergenza quasi ovunque.

Definizione 2.34 *Diciamo che una successione $(f_n)_n$ di funzioni misurabili su $(X, \mathcal{M}, \mu)$ è* **di Cauchy in misura** *se per ogni $\varepsilon > 0$*

$$\mu\{x : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\} \to 0 \quad \text{per } m, n \to \infty$$

e diciamo che $(f_n)_n$ **converge in misura** *a f (scritto anche $f_n \xrightarrow{\mu} f$) se per ogni $\varepsilon > 0$*

$$\mu\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \to 0 \quad \text{per } n \to \infty$$

Proposizione 2.35 *Se $f_n \to f$ in L^1, allora $f_n \to f$ in misura.*

Dimostrazione. Definiamo $E_{n,\varepsilon} = \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$. Allora

$$\int_X |f_n - f| \, d\mu \geq \int_{E_{n,\varepsilon}} |f_n - f| \, d\mu \geq \varepsilon \mu(E_{n,\varepsilon})$$

quindi $\mu(E_{n,\varepsilon}) \leq \int_X |f_n - f| \, d\mu / \varepsilon \to 0$ e segue la tesi. □

L'inverso è falso, come mostra il seguente esempio.

Esempio 2.36 *Sullo spazio* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ *consideriamo la successione* $f_n = n\mathbf{1}_{[0,1/n]}$. *Allora* $f_n \to 0$ *in misura, ma siccome* $\|f_n\|_{L^1} = 1$, *non converge a 0 in* L^1.

Teorema 2.37 *Supponiamo che* $(f_n)_n$ *sia di Cauchy in misura. Allora esiste una* f *misurabile tale che* $f_n \to f$ *in misura, e una sottosuccessione* $(f_{n_j})_j$ *che converge a* f *q.c. Inoltre, se anche* $f_n \to g$ *in misura, allora* $g = f$ *q.c.*

Dimostrazione. Possiamo scegliere una sottosuccessione $(g_j)_j = (f_{n_j})_j$ tale che se $E_j = \{x : |g_j(x) - g_{j+1}(x)| \geq 2^{-j}\}$ allora $\mu(E_j) \leq 2^{-j}$. Se poniamo $F_k = \bigcup_{k=j}^{\infty} E_j$, allora $\mu(F_k) \leq \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j} = 2^{1-k}$ e se $x \notin F_k$, per $i \geq j \geq k$ abbiamo

$$|g_j(x) - g_i(x)| \leq \sum_{l=j}^{i-1} |g_{l+1}(x) - g_l(x)| \leq \sum_{l=j}^{i-1} 2^{-l} \leq 2^{1-j}$$

cioé $(g_j)_j$ è di Cauchy puntualmente su F_k^c. Poniamo $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \limsup_{n\to\infty} E_j$; allora $\mu(F) = 0$, e se poniamo $f = \lim_{n\to\infty} g_j$ su F e $f = 0$ su F^c, allora f è misurabile e $g_j \to f$ q.o. Inoltre, la relazione sopra mostra che $|g_j(x) - f(x)| \leq 2^{2-j}$ per $j \geq k, x \notin F_k$. Siccome $\mu(F_k) \to 0$, segue che $g_n \to f$ in misura; ma allora $f_n \to f$ in misura, dato che

$$\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subset \{x : |f_n(x) - g_j(x)| \geq \varepsilon/2\} \cup \{x : |g_j(x) - f(x)| \geq \varepsilon/2\}$$

ed entrambi gli insiemi a destra hanno misura piccola quando n e j sono grandi. Inoltre, se $f_n \to g$ in misura, allora

$$\{x : |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} \subset \{x : |f_n(x) - g(x)| \geq \varepsilon/2\} \cup \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon/2\}$$

per ogni n, quindi $\mu\{x : |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\} = 0$ per ogni ε. Ma questo significa che $f = g$ q.o. □

Corollario 2.38 *Se* $f_n \to f$ *in* L^1, *allora esiste una sottosuccessione* $(f_{n_j})_j$ *che converge a* f *q.o.*

Se $f_n \to f$ q.c., non segue in generale che $f_n \to f$ in misura (come si può vedere considerando le funzioni $f_n = \mathbf{1}_{(n,n+1)}$). Se però lo spazio ha misura finita, è verificato un risultato molto più forte.

Teorema 2.39 (di Egorov) *Se* $\mu(X) < \infty$ *e* f_n *ed* f *sono funzioni misurabili tali che* $f_n \to f$ *q.o., allora per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $E \in \mathcal{M}$ *tale che* $\mu(E) < \varepsilon$ *e* $f_n \to f$ *uniformemente su* E^c.

Dimostrazione. Senza perdita di generalità possiamo assumere che $f_n \to f$ ovunque su X. Per $k, n \in \mathbb{N}$ poniamo $E_n(k) = \bigcup_{m=n}^{\infty}\{x : |f_m(x) - f(x)| \geq 1/k\}$. Allora, per k fissato, $E_n(k)$ è decrescente rispetto a n, e $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(k) = \emptyset$, quindi siccome $\mu(X) < \infty$ abbiamo che $\mu(E_n(k)) \to 0$ per $n \to \infty$. Preso $\varepsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$, possiamo prendere n_k tale che $\mu(E_{n_k}(k)) < \varepsilon 2^{-k}$ e porre $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{n_k}(k)$. Allora $\mu(E) < \varepsilon$, e abbiamo $|f_n(x) - f(x)| < 1/k$ per $n > n_k$ e $x \notin E$. Questo implica che $f_n \to f$ uniformemente su E.
□

Il tipo di convergenza nel teorema di Egorov è spesso chiamato **convergenza quasi uniforme**. Non è difficile vedere che la convergenza quasi uniforme implica la convergenza quasi ovunque e la convergenza in misura.

2.5 Integrale di Lebesgue

Un caso molto particolare della teoria vista sopra è il caso $(X, \mathcal{M}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$, dove m è la misura di Lebesgue. Infatti questo è il caso che storicamente é stato il primo ad essere sviluppato nella teoria dell'integrazione, con lo scopo iniziale di estendere la teoria dell'integrazione di Riemann. Dall'integrazione con la misura di Lebesgue poi è nata la teoria dell'integrazione astratta come generalizzazione. Per questa ragione, si usa anche una notazione particolare.

Definizione 2.40 *L'integrale $\int_{\mathbb{R}} f\ dm$ si indica semplicemente come* **integrale di Lebesgue** *di f. Allo stesso modo, se $\int_{\mathbb{R}} |f|\ dm < +\infty$, allora f si dice* **integrabile secondo Lebesgue**.

Confrontiamo ora l'integrale di Riemann e l'integrale rispetto alla misura di Lebesgue. A questo scopo, ricordiamo la costruzione dell'integrale di Riemann.

Sia $[a, b]$ un intervallo, con a, b numeri reali. Chiamiamo **partizione** di $[a, b]$ una successione finita $P = (t_i)_{i=0,\dots,n}$ tale che $a = t_0 < \dots < t_n = b$, e chiamiamo **ampiezza** della partizione P il numero $|P| = \sup_i |t_i - t_{i-1}|$. Diciamo inoltre che $P = (t_i)_{i=0,\dots,n}$ è un **raffinamento** di $Q = (s_j)_{j=0,\dots,k}$ se $\{s_j \mid j = 0, \dots, k\} \subset \{t_i \mid i = 0, \dots, n\}$. Sia f una funzione reale limitata arbitraria, e per ogni partizione P poniamo

$$S_P(f) = \sum_{i=0}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}), \qquad s_P(f) = \sum_{i=0}^{n} \ell_i(t_i - t_{i-1})$$

dove $M_i = \sup_{x \in (t_{i-1}, t_i]} f(x)$, $\ell_i = \inf_{x \in (t_{i-1}, t_i]} f(x)$. Definiamo poi:

$$I^+(f) = \inf_P S_P(f), \qquad I^-(f) = \sup_P s_P(f)$$

Quando $I^+(f) = I^-(f)$, chiamiamo **integrale di Riemann** il loro valore comune, e lo indichiamo con $\int_a^b f(x)\ dx$; diciamo inoltre che f è **integrabile secondo Riemann**.

Diamo ora questo risultato, di cui proviamo solo la prima parte.

Teorema 2.41 *Se f è una funzione limitata in $[a, b]$, allora:*

i) se f è integrabile secondo Riemann, allora é misurabile (e quindi integrabile rispetto alla misura di Lebesgue m dato che è limitata) e $\int_a^b f(x)\ dx = \int_{[a,b]} f\ dm$;

ii) f è integrabile secondo Riemann se e solo se $m(\{x \in [a, b] \mid f$ è discontinua in $x\}) = 0$

Dimostrazione. Supponiamo che f sia integrabile secondo Riemann. Per ogni partizione P poniamo:

$$G_P(f) = \sum_{i=0}^{n} M_i \mathbf{1}_{(t_{i-1}, t_i]}, \qquad g_P(f) = \sum_{i=0}^{n} \ell_i \mathbf{1}_{(t_{i-1}, t_i]}$$

allora $S_P(f) = \int_{[a,b]} G_P(f)\ dm$ e $s_P(f) = \int_{[a,b]} g_P(f)\ dm$. Inoltre esiste una sequenza $(P_k)_k$ di partizioni, la cui ampiezza tende a 0, che sono ognuna un raffinamento della precedente (e quindi tali che le g_{P_k} crescono e le G_{P_k} decrescono con k) e tali che $S_{P_k}(f)$ e $s_{P_k}(f)$ convergono a $\int_a^b f(x)\ dx$. Poniamo $G = \lim_{k\to\infty} G_{P_k}$ e $g = \lim_{k\to\infty} g_{P_k}$. Allora $g \leq f \leq G$, e per il teorema della convergenza dominata $\int_{[a,b]} g\ dm = \int_{[a,b]} G\ dm = \int_a^b f(x)\ dx$. Allora $\int_{[a,b]}(G-g)\ dm = 0$, quindi $G = g$ q.o., cioé $G = g = f$ q.o. Siccome G é misurabile (poiché limite di funzioni misurabili), e m é completa, allora anche f è misurabile; inoltre si ha che $\int_{[a,b]} f\ dm = \int_{[a,b]} G\ dm = \int_a^b f(x)\ dx$. □

Da questo teorema si ricava che l'integrale di Lebesgue estende l'integrale di Riemann proprio. Infatti tutte le funzioni integrabili secondo Riemann in un intervallo sono anche integrabili secondo Lebesgue, e i due integrali coincidono. Questo in particolare permette di usare tutte le tecniche di calcolo degli integrali di Riemann (teorema fondamentale del calcolo, integrazione per sostituzione e per parti) per calcolare gli integrali di Lebesgue. Inoltre questo risultato vale anche per una generica dimensione n. Per questo motivo per indicare l'integrale rispetto alla misura di Lebesgue si usano comunemente le notazioni $\int_a^b f(x)\ dx$ (su un intervallo $[a,b]$) o $\int_E f(x)\ dx$ (su un boreliano $E \subseteq \mathbb{R}^n$). Tuttavia, se tentiamo di generalizzare le ipotesi di questo teorema per trattare l'integrale di Riemann improprio, potremmo trovare che l'integrale improprio di Riemann di f è definito, ma f non é integrabile secondo Lebesgue (esempio: $f = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \mathbf{1}_{(n,n+1)}/n$). Per questo motivo, ci vuole sempre una certa cautela quando si trattano degli integrali di Lebesgue di funzioni non limitate o su intervalli non limitati.

2.6 Misure prodotto

Supponiamo di avere degli spazi misurati $(X_\alpha, \mathcal{M}_\alpha, \mu_\alpha)$, dove $\alpha \in A$ è un parametro. Abbiamo già visto come costruire la σ-algebra prodotto $\mathcal{M} = \bigotimes_{\alpha\in A} \mathcal{M}_\alpha$ sullo spazio prodotto $X = \Pi_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$. Vogliamo ora costruire una misura sullo spazio $(\Pi_\alpha X_\alpha, \otimes_{\alpha\in A}\mathcal{M}_\alpha)$, con A insieme finito. Per semplicità di notazioni, ci limiteremo al caso $A = \{1,2\}$. Nel seguito indicheremo con $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ la proiezione canonica sulla α-esima coordinata.

Chiamiamo **rettangolo** un insieme $A_1 \times A_2$, con $A_i \in \mathcal{M}_i$. Allora la classe $\mathcal{A}$ delle unioni finite disgiunte di rettangoli é un'algebra, e $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ è generata da $\mathcal{A}$.

Definizione 2.42 *Se μ_i sono misure σ-finite sugli spazi X_i, chiamiamo* **misura prodotto** *di μ_1 e μ_2 l'unica misura tale che*

$$\mu_1 \otimes \mu_2(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \tag{2.1}$$

per ogni rettangolo $A_1 \times A_2$.

Proposizione 2.43 *La misura prodotto è ben definita. In altre parole, se μ_i sono misure σ-finite sugli spazi X_i, allora esiste un'unica misura tale che (2.1) sia verificata.*

Dimostrazione. Possiamo definire $\mu_1 \otimes \mu_2$ su $\mathcal{A}$ in questo modo:

$$\mu_1 \otimes \mu_2 \left(\bigcup_{i=1}^n A_1^i \times A_2^i \right) = \sum_{i=1}^n \mu_1(A_1^i)\mu_2(A_2^i)$$

allora $\mu_1 \otimes \mu_2$ è ben definita ed è una premisura su $\mathcal{A}$. Allora, come conseguenza del teorema di Caratheodory, $\mu_1 \otimes \mu_2$ genera una misura esterna su $X_1 \times X_2$ la cui restrizione a $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ è una misura. In più, questa estensione è unica. $\square$

Esempio 2.44 (misura di Lebesgue n-dimensionale) Prendiamo $A = \{1, \ldots, n\}$ e $(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m_1)$, $i = 1, \ldots, n$ (dove chiamiamo m_1 la misura di Lebesgue). La misura prodotto $m_n = m_1 \otimes \ldots \otimes m_1$ (indicata anche con $m^{\otimes n}$ si chiama **misura di Lebesgue n-dimensionale**, o **misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$**, e assegna ad ogni rettangolo n-dimensionale il suo volume, nel senso che

$$m_n \left(\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \right) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

Analogamente al caso $n = 1$, anche $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ non è completa rispetto alla misura di Lebesgue m_n. Questo implica che m_n si può estendere ad una σ-algebra $\mathcal{L}^n$ che contiene strettamente $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. In questo caso è facile vedere esempi di insiemi misurabili non boreliani. Prendiamo ad esempio un rettangolo $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0, -a \leq x_i \leq a, i = 2, \ldots, n\}$, con $a > 0$. Allora $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, e $m_n(B) = 0 \cdot a^{n-1} = 0$. Se consideriamo la classe $\mathcal{P}(B)$, essa ha la stessa cardinalità di $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Si può dimostrare che $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ha la cardinalità del continuo, cioé ha cardinalità minore di $\mathcal{P}(B)$. Questo significa che devono esistere degli insiemi in $\mathcal{P}(B)$ (e sono "la maggior parte") che non sono boreliani. Siccome $m_n(B) = 0$, la misura di Lebesgue può essere estesa a tutti i sottoinsiemi di B ponendo $m_n(C) = 0$ per ogni $C \in \mathcal{P}(B)$. Abbiamo quindi ottenuto che $\mathcal{L}^n$ è strettamente maggiore di $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Il risultato può essere esteso facilmente: infatti si può dimostrare che una qualsiasi varietà k-dimensionale, con $k < n$, immersa in $\mathbb{R}^n$, è boreliana ed ha misura di Lebesgue n-dimensionale nulla, ma non tutti i sottoinsiemi della varietà sono boreliani; tuttavia, essi sono misurabili (cioé appartengono a L^n), ed hanno misura nulla.

Riassumiamo ora (senza dimostrazioni) alcuni risultati sull'integrale di Lebesgue n-dimensionale. Chiamiamo $\mathcal{L}^n$ il completamento di $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ rispetto alla misura di Lebesgue m_n.

Teorema 2.45 *La misura di Lebesgue è invariante per traslazione. Cioé, se $E \in \mathcal{L}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$ e definiamo $E + x = \{y + x : x \in E\}$, allora $E + x \in \mathcal{L}^n$ e $m_n(E + x) = m_n(E)$.*

Vediamo ora un risultato (senza dimostrazione) che permette di calcolare operativamente gli integrali in dimensione n.

Teorema 2.46 (Fubini - Tonelli) *Supponiamo che $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ siano spazi misurati, con μ e ν misure σ-finite. Allora:*

Fubini: *se $f \in L^1(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \otimes \nu)$, allora $f(x, \cdot) \in L^1(Y, \mathcal{N}, \nu)$ per q.o. $x \in X$, $f(\cdot, y) \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ per q.o. $y \in Y$, le funzioni (definite q.o.) $\int_Y f(x, \cdot)\, d\nu$ e*

$\int_X f(\cdot, y)\ d\mu$ *sono rispettivamente in* $L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ *e in* $L^1(Y, \mathcal{N}, \nu)$ *e vale*

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)\ d(\mu\otimes\nu)(x,y) &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\ d\nu(y)\right)\ d\mu(x) = \\ &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\ d\mu(x)\right)\ d\nu(y)\end{aligned} \tag{2.2}$$

Tonelli: *se* $f \in L^+(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \otimes \nu)$*, allora le funzioni* $\int_Y f(x, \cdot)\ d\nu$ *e* $\int_X f(\cdot, y)\ d\mu$ *sono rispettivamente in* $L^+(X, \mathcal{M}, \mu)$ *e in* $L^+(Y, \mathcal{N}, \nu)$ *e vale la (2.2).*

Corollario 2.47 *Il teorema di Fubini-Tonelli vale anche nel caso* $(X, \mathcal{M}, \mu) = (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m), m_m)$ *e* $(Y, \mathcal{N}, \nu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), m_n)$.

Dal corollario si ricava anche che è possibile calcolare l'integrale di una funzione su $\mathbb{R}^n$ iterando gli integrali su ogni componente. Inoltre il teorema 2.41 e il corollario 2.47 permettono di usare tutte le tecniche di calcolo degli integrali di Riemann (teorema fondamentale del calcolo, integrazione per sostituzione e per parti, cambiamenti di variabili, ecc.) per calcolare gli integrali di Lebesgue.

2.7 Integrale di Lebesgue n-dimensionale

Abbiamo visto che il calcolo degli integrali di Lebesgue in dimensione 1 può essere ridotto al calcolo degli integrali di Riemann. Una conclusione analoga vale anche in dimensione n. Per vederlo, si procederà per passi successivi. Come nel caso della misura di Lebesgue in dimensione 1, anche nel caso della misura di Lebesgue m_n si usa una notazione particolare.

Definizione 2.48 *L'integrale* $\int_{\mathbb{R}^n} f\ dm_n$ *si indica semplicemente come* **integrale di Lebesgue n-dimensionale** *di* f*. Allo stesso modo, se* $\int_{\mathbb{R}^n} |f|\ dm_n < +\infty$*, allora* f *si dice* **integrabile secondo Lebesgue**.

Un primo risultato è il seguente.

Teorema 2.49 *Se* $\int f\ dx$ *è definito (anche uguale a* ∞*), allora* $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)\ dx$ *per ogni* $y \in \mathbb{R}^n$.

Vediamo ora qual è il comportamento dell'integrale di Lebesgue sotto trasformazioni lineari. Chiamiamo $GL(n, \mathbb{R})$ il gruppo delle trasformazioni lineari invertibili su $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.50 *Supponiamo che* $T \in GL(n, \mathbb{R})$*. Allora:*

a) se $E \in \mathcal{L}^n$*, allora* $T(E) \in \mathcal{L}^n$ *e* $m_n(T(E)) = |\det T|\ m_n(E)$.

b) se f *è misurabile secondo Lebesgue, allora anche* $f \circ T$ *lo é; inoltre, se* $\int_{\mathbb{R}^n} f\ dx$ *è definito, allora*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ dx = |\det T| \int_{\mathbb{R}^n} f \circ T(x)\ dx$$

Corollario 2.51 *La misura di Lebesgue è invariante per rotazioni e per simmetrie.*

Diamo ora una generalizzazione di questo risultato, che è il classico teorema di cambiamento di variabile in dimensione n. Ricordiamo che se Ω è un aperto in $\mathbb{R}^n$ e una funzione $G : \Omega \to \mathbb{R}^n$ è differenziabile, possiamo indicare con il simbolo $D_x G$ il differenziale, definito dalla matrice $(\partial g_i/\partial x_j(x))_{ij}$ delle sue derivate nel punto x. Ricordiamo inoltre che G si dice **diffeomorfismo di classe** C^1 se é biiettiva e se $D_x G$ è una matrice invertibile per ogni $x \in \Omega$.

Teorema 2.52 *Supponiamo che Ω sia un aperto in $\mathbb{R}^n$ e che $G : \Omega \to \mathbb{R}^n$ sia un diffeomorfismo di classe C^1. Allora:*

a) se $E \subset \Omega$ ed $E \in L^n$, allora $G(E) \in L^n$ e $m_n(G(E)) = \int_E |\det D_x G(x)|\ dx$.

b) se $f : G(\Omega) \to \mathbb{R}$ è misurabile secondo Lebesgue, allora anche $f \circ G$ lo é; inoltre, se $\int_{G(\Omega)} f\ dx$ è definito, allora

$$\int_{G(\Omega)} f(x)\ dx = \int_\Omega f \circ G(x) |\det D_x G(x)|\ dx$$

I sistemi di coordinate non lineari più importanti su $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$ sono le coordinate polari e le coordinate sferiche. Il teorema precedente, applicato a questi due casi, portano alle note formule "$dx\ dy = r\ dr\ d\theta$" e "$dx\ dy\ dz = r^2 \sin\varphi dr\ d\theta\ d\varphi$". Sistemi di coordinate simili possono essere definiti in dimensioni più alte, ma diventano sempre più complicati al crescere della dimensione. Per molti scopi è sufficiente sapere che la misura di Lebesgue è il prodotto della misura $\rho(E) = \int_E r^{n-1}\ dr$ su $[0, +\infty)$ per una opportuna misura sulla sfera unitaria ($d\theta$ su S^1, $\sin\varphi d\theta\ d\varphi$ su S^2):

Teorema 2.53 *Esiste un'unica misura $\sigma = \sigma_{n-1}$ su S^{n-1} tale che $m_n = \rho \otimes \sigma_{n-1}$. Se f è misurabile secondo Lebesgue su $\mathbb{R}^n$ e $\int_{\mathbb{R}^n} f\ dx$ è definito, allora*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(rx')r^{n-1}\ d\sigma(x')\ dr$$

Corollario 2.54 *Se f è misurabile secondo Lebesgue su $\mathbb{R}^n$, $\int_{\mathbb{R}^n} f\ dx$ é definito, ed f è della forma $f(x) = g(|x|)$, allora*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ dx = \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty g(r)r^{n-1}\ dr$$

Corollario 2.55 *Fissato $a > 0$, poniamo $B = B(0, a)$ in $\mathbb{R}^n$, e sia f una funzione misurabile su $\mathbb{R}^n$. Allora:*

a) se $|f(x)| \le Cx^{-\alpha}$ su B per qualche $C > 0$ e $\alpha < n$, allora $f \in L^1(B)$; se $|f(x)| \ge Cx^{-n}$ su B, allora $f \notin L^1(B)$

a) se $|f(x)| \le Cx^{-\alpha}$ su B^c per qualche $C > 0$ e $\alpha > n$, allora $f \in L^1(B^c)$; se $|f(x)| \ge Cx^{-n}$ su B^c, allora $f \notin L^1(B^c)$

2.8 Integrali dipendenti da parametro

Alcune volte può capitare di avere a che fare con funzioni della forma

$$F(y) = \int_X f(x,y)\ d\mu(x) \tag{2.3}$$

dove $(X, \mathcal{M}, \mu)$ è uno spazio misurabile e y è un parametro che può variare in vari tipi di spazi. In questa sezione vedremo alcune proprietà di queste funzioni.

Supponiamo che $f : X \times E \to \mathbb{C}$, dove E è un aperto di uno spazio vettoriale reale Y che sia anche normato, e che la funzione $F : E \to \mathbb{C}$ sia definita da (2.3). Può allora essere interessante vedere se le proprietà di continuità e di differenziabilità di f si possono estendere anche a F.

Teorema 2.56 *Supponiamo che per ogni y fissato la funzione $f(\cdot, y) \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu; \mathbb{C})$. Allora:*

a) supponiamo che per $\bar{y} \in E$ esista un intorno U di $\bar{y}$ e una $g \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu; \mathbb{C})$ tale che per ogni $y \in U$, $|f(x,y)| \le g(x)$ per quasi ogni $x \in X$; allora se $\lim_{y\to\bar{y}} f(x,y) = f(x,\bar{y})$ per quasi ogni $x \in X$, anche $\lim_{y\to\bar{y}} F(y) = F(\bar{y})$

b) supponiamo che per un vettore $u \in Y$ esista $\partial_u f(x,y)$ per ogni $y \in E$ e per q.o. x; se per un $\bar{y} \in E$ esistono un intorno U di $\bar{y}$ e una $g \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu; \mathbb{C})$ tale che per ogni $y \in U$, $|\partial_u f(x,y)| \le g(x)$ per quasi ogni $x \in X$, allora

$$\partial_u F(y) = \int_X \partial_u f(x,y)\ d\mu(x)$$

Dimostrazione. a) prendiamo una successione $(y_n)_n$ in U convergente a $\bar{y}$, e consideriamo le funzioni $f_n(x) = f(x, y_n)$. Allora le f_n sono dominate da g, quindi segue la tesi.

b) supponiamo che U sia convesso, e che $(h_n)_n$ sia una successione reale infinitesima di numeri non nulli. Il teorema del valor medio, applicato alla funzione $h \to f(x, \bar{y} + hu) - f(x, \bar{y})$ (definita in un intorno di 0 in $\mathbb{R}$) ci dice che

$$\left| \frac{f(x, \bar{y} + h_n u) - f(x, \bar{y})}{h_n} \right| \le \sup_{y\in U} |\partial_u f(x,y)| \le g(x)$$

per q.o. $x \in X$. Definiamo ora

$$f_n(x) = \frac{f(x, \bar{y} + h_n u) - f(x, \bar{y})}{h_n}$$

Allora per il teorema della convergenza dominata si ha:

$$\partial_u F(\bar{y}) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(\bar{y} + h_n u) - F(\bar{y})}{h_n} = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\ d\mu = \int_X \partial_u f(x, \bar{y})\ d\mu$$

e segue la tesi. □

Appendice A

Complementi

In questo capitolo vogliamo riprendere alcuni argomenti che per mancanza di tempo non sono stati trattati nei primi due capitoli.

A.1 Insieme di Cantor

In questa sezione vogliamo fare un esempio di insiemi non boreliani sulla retta reale, ma misurabili secondo Lebesgue. Per questo, abbiamo bisogno di introdurre il seguente insieme.

Esempio A.1 (insieme di Cantor) Definiamo $C_0 = [0,1]$, e $C_{n+1} = C_n \setminus \bigcup_{i=0}^{3^{n-1}-1}(\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n})$; definiamo **insieme di Cantor** l'insieme $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. L'insieme C può essere definito anche in questo modo: per un generico $x \in [0,1]$ consideriamo la sua espansione decimale $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/3^n$ in base 3, con $a_n = 0, 1$ o 2, e facciamo la convenzione che i numeri della forma $p3^{-k}$ abbiano la rappresentazione $a_n = 2$ per $n > k$; allora C è l'insieme degli $x \in [0,1]$ che non hanno la cifra 1 nella loro rappresentazione decimale. C ha le seguenti proprietà notevoli:

a) C è compatto

b) se $x, y \in C$ e $x < y$, allora esiste $z \notin C$ tale che $x < z < y$ (C è **totalmente sconnesso**)

c) C non ha punti isolati

d) $m(C) = 0$

e) C è in corrispondenza biunivoca con l'intervallo $[0,1]$; in particolare C ha la cardinalità del continuo

Proveremo solo le ultime due proprietà. Per provare (d), basta notare che $m(C_n) = (2/3)^n$, e quindi $m(C) = \lim_{n\to\infty} m(C_n) = 0$. Per provare (e), notiamo che se $x \in C$, allora $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/3^n$, con $a_n = 0$ o 2; definiamo allora $b_n = a_n/2$ (che corrisponde a sostituire un 2 con un 1 nella rappresentazione decimale) e definiamo $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/2^n$. Allora $f(x)$ è l'espansione in base 2 di un numero. Siccome ogni elemento di $[0,1]$ può essere ottenuto in questo modo, f è bigettiva da C a $[0,1]$.

Abbiamo appena visto che l'insieme di Cantor C ha misura di Lebesgue nulla e ha la cardinalità del continuo. Ciò significa che la classe delle sue parti $\mathcal{P}(C)$ ha la stessa cardinalità di $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Si può dimostrare che $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ha la cardinalità del continuo, cioé ha cardinalità minore di $\mathcal{P}(C)$. Questo significa che la maggior parte degli insiemi in $\mathcal{P}(C)$ non è boreliana. Siccome $m(C) = 0$, la misura di Lebesgue può essere estesa a tutti gli insiemi in $\mathcal{P}(C)$, quindi abbiamo ottenuto che $\mathcal{L}$ è strettamente maggiore di $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Per questo motivo, la terminologia che si usa per le funzioni misurabili reali è quella della definizione 2.2, invece di essere quella standard della definizione 2.1.

Riprendiamo in esame la funzione f definita nell'esempio. Notiamo che f è monotona crescente da C in $[0, 1]$; in particolare, $f(x) < f(y)$ per ogni $x < y$ che non siano estremi di un intervallo che non appartiene a C (quelli che sono stati tolti per ottenerlo); in questo caso, $f(x) = f(y) = p2^{-k}$ per qualche p, k. Possiamo quindi estendere f ad una funzione da $[0, 1]$ in sé definendo il suo valore in ogni intervallo mancante da C come il valore ai suoi estremi. Questa funzione (che continuiamo a chiamare f) è ancora crescente, e siccome la sua immagine è tutto $[0, 1]$, non può avere discontinuità di salto; questo, insieme alla monotonia, implica la sua continuità. La funzione f è comunemente conosciuta come **funzione di Cantor**, o **scala di Cantor**.

A.2 Integrazione di funzioni complesse

All'inizio del capitolo 2 abbiamo notato che la teoria dell'integrazione di Lebesgue poteva essere costruita anche nel caso di funzioni a valori complessi. Qui enunciamo i teoremi corrispondenti a questo caso; le dimostrazioni non verranno svolte, essendo per la maggior parte generalizzazioni di quelle del capitolo 2; per maggiori dettagli, il lettore interessato può vedere [2].

Per tutta la sezione faremo la convenzione che una funzione $f : X \to \mathbb{C}$ sia **misurabile** quando è $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$-misurabile.

Dalla proposizione 2.10 si ricavano i due seguenti corollari:

Corollario A.2 *Una funzione complessa f è misurabile se e solo se $\Re f$ e $\Im f$ lo sono.*

Corollario A.3 *Se $f, g : X \to \mathbb{C}$ sono misurabili, allora anche $f + g$ e fg lo sono.*

Dalla proposizione 2.12 (il limite di funzioni misurabili é una funzione misurabile) segue questo risultato:

Corollario A.4 *Se $(f_n)_n$ è una successione di funzioni complesse misurabili e $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ esiste per ogni x, allora f é misurabile.*

Analogamente alla decomposizione $f = f^+ - f^-$ delle funzioni reali, anche nel caso delle funzioni complesse c'é una utile decomposizione, chiamata **decomposizione polare**. Se z è un numero complesso, indichiamo con $|z|$ la sua norma in $\mathbb{C}$ e definiamo la funzione **segno** in questo modo:

$$\operatorname{sgn} z = \begin{cases} z/|z| & \text{se } z \neq 0 \\ 0 & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

Allora possiamo scrivere $f = (\text{sgn } f)|f|$ per una generica funzione complessa f. Siccome l funzione segno e il modulo sono boreliane, abbiamo che f è misurabile se e solo se sgn f e $|f|$ lo sono.

Come nel caso reale, chiamiamo **funzione semplice** una combinazione lineare finita a coefficienti complessi di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili, che sarà della forma $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{E_i}(x)$, con $a_i \in \mathbb{C}$; se $a_i \neq a_j$ per $i \neq j$, allora diciamo che φ è scritta in **rappresentazione standard**. Anche nel caso di funzioni a valori complessi, una funzione misurabile può essere opportunamente approssimata con funzioni semplici in questo modo:

Teorema A.5 *Se $(X, \mathcal{M})$ è uno spazio misurabile, e $f : X \to \mathbb{C}$ é misurabile, allora esiste una successione di funzioni semplici $(\varphi_n)_n$ tali che $0 \leq |\varphi_1| \leq \ldots \leq |\varphi_n| \leq \ldots \leq |f|$, $\varphi_n \to f$ puntualmente, e $\varphi_n \to f$ uniformemente su ogni insieme su cui f è limitata.*

Se f è una funzione complessa misurabile, diciamo che f è **integrabile** se la funzione reale $|f|$ lo é. Siccome $|f| \leq |\Re f| + |\Im f| \leq 2|f|$, otteniamo che f è integrabile se e solo se $\Re f$ e $\Im f$ lo sono; definiamo poi l'integrale di f in questo modo:

$$\int_X f \, d\mu = \int_X \Re f \, d\mu + i \int_X \Im f \, d\mu$$

Da questo segue facilmente che lo spazio delle funzioni integrabili complesse è uno spazio vettoriale e l'integrale è un funzionale lineare su di esso; inoltre abbiamo che $|\int_X f \, d\mu| \leq \int_X |f| \, d\mu$ per ogni f integrabile. Anche in questo caso possiamo mettere su questo spazio la relazione di equivalenza $f \equiv g$ se e solo se $\int_X |f - g| \, d\mu = 0$. Lo spazio ottenuto in questo modo viene indicato con $L^1(X, \mathcal{M}, \mu; \mathbb{C})$ (rispetto al caso reale, si specifica anche lo spazio di arrivo). Valgono le seguenti generalizzazioni di risultati del capitolo 2:

Proposizione A.6 *Se f e g sono integrabili, allora sono equivalenti:*

i) $\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu$ *per ogni* $E \in \mathcal{M}$

ii) $\int_X |f - g| \, d\mu = 0$

iii) $f = g$ *q.o.*

Teorema A.7 (della convergenza dominata di Lebesgue) *Se $(f_n)_n \subset L^1$ tale che $f_n \to f$ q.o. ed esiste $g \in L^1$ tale che $|f_n| \leq g$ per ogni n, allora $f \in L^1$ e $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$.*

Teorema A.8 *Se $(f_n)_n$ è una successione in L^1 tale che $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \, d\mu < +\infty$, allora $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge q.o. a una funzione in L^1, e $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X (\sum_{n=1}^{\infty} f_n) \, d\mu$.*

Appendice B

Temi di esame con soluzioni

B.1 Prova scritta del 28 gennaio 1999

1. Se $f \in L^+(X, \mathcal{M})$, poniamo:
$$\lambda(E) = \int_E f \; d\mu$$
Dimostrare che λ è una misura su $(X, \mathcal{M})$ e che $\int_X g \; d\lambda = \int_X fg \; d\mu$ per ogni $g \in L^+(X, \mathcal{M})$ (suggerimento: prima supporre g semplice)

2. Dimostrare che $f(x) = x^{-\alpha}$ è integrabile secondo Lebesgue su $(0,1)$ per $\alpha \in (0,1)$ e calcolare $\int_0^x f(t) \; dt$ (suggerimento: usare il punto 1 o il teorema di Beppo Levi)

Soluzione

1. $\lambda(\emptyset) = 0$, e se $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, con $A_n \in \mathcal{M}$, allora:
$$\lambda(A) = \int_A f \; d\mu = \int_X \mathbf{1}_A f \; d\mu = \int_X \sum_{n=1}^\infty \mathbf{1}_{A_n} f \; d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_X \mathbf{1}_{A_n} f \; d\mu = \sum_{n=1}^\infty \lambda(A_n)$$
dove si è usato il teorema di integrazione per serie. (2 punti)
Se $g = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{E_i}$ è una funzione semplice, allora:
$$\begin{aligned} \int_X g \; d\lambda &= \int_X \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{E_i} \; d\lambda = \sum_{i=1}^n a_i \lambda(E_i) = \sum_{i=1}^n a_i \int_X \mathbf{1}_{E_i} f \; d\mu = \\ &= \int_X \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{E_i} f \; d\mu = \int_X gf \; d\mu \end{aligned}$$
Se $g \in L^+$, allora esiste una successione $(g_n)_n$ di funzioni semplici in L^+ tale che $g_n \nearrow g$. Allora anche $fg_n \nearrow fg$, e per Beppo Levi si ha:
$$\int_X g \; d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n \; d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n f \; d\mu = \int_X gf \; d\mu \quad \text{(3 punti)}$$

2. $\lambda(E) = \int_E f(x)\ dx$ è una misura su $(0,1)$, quindi per la continuità dal basso si ha $\lim_{n\to\infty} \lambda((1/n,x)) = \lambda((0,x))$ per ogni $x \le 1$. Ma $\lambda((1/n,x)) = \int_{1/n}^x t^{-\alpha}\ dt$ è l'integrale di una funzione integrabile secondo Riemann (perché continua e limitata); allora:

$$\lambda((1/n,x)) = \left[\frac{1}{1-\alpha}t^{1-\alpha}\right]_{1/n}^x = \frac{x^{1-\alpha} - (1/n)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \overset{n\to\infty}{\to} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \int_0^x t^{-\alpha}\ dt$$

da questo si ricava in particolare che $\int_0^1 f(x)\ dx = \lambda((0,1)) = \frac{1}{1-\alpha} < +\infty$, e quindi f è integrabile secondo Lebesgue.

Si poteva anche usare il teorema di Beppo Levi in questo modo: costruiamo la successione $f_n = f\mathbf{1}_{(1/n,1)}$. Allora $f_n \nearrow f$ e quindi

$$\int_0^x f(t)\ dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n(t)\ dt = \lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^x t^{-\alpha}\ dt$$

e si ha il risultato visto prima (2 punti per $f \in L^1((0,1))$ e 2 punti per $\int_0^x f(t)\ dt$).

B.2 Prova scritta del 18 febbraio 1999

Sia $f(x) = x^{-1/2}$ se $x \in (0,1)$, $f(x) = 0$ altrove; sia inoltre $(r_n)_{n=1,\dots,\infty}$ una enumerazione dei razionali, e poniamo $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} f(x - r_n)$.

1. Enunciare il teorema di integrazione per serie di funzioni positive e il teorema di Beppo-Levi.

   Dimostrare che:

2. $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ (dove m è la misura di Lebesgue), e in particolare $g < \infty$ quasi ovunque (suggerimento: usare i teoremi di integrazione per serie e di Beppo Levi)

3. g è non limitata in ogni intervallo, e quindi é discontinua in ogni punto (suggerimento: calcolare il limite della funzione in un punto razionale dell'intervallo)

4. $g^2 < \infty$ q.o., ma $g^2 \notin L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$

Soluzione

1. vedi dispense

2. $f, g \in L^+$, quindi si puo' integrare per serie:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} g\ dx &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\int_{\mathbb{R}} f(x-r_n)\ dx = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\int_{\mathbb{R}} f(x)\ dx = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\int_0^1 x^{-1/2}\ dx = \\ &= \int_0^1 x^{-1/2}\ dx = \lim_{k\to\infty}\int_{1/k}^1 x^{-1/2}\ dx = \lim_{k\to\infty}[2x^{1/2}]_{1/k}^1 = 2 < \infty\end{aligned}$$

(dove abbiamo anche usato Beppo Levi), quindi $g \in L^1$. Questo implica che g è quasi certamente finita. (2 punti)

3. prendiamo un intervallo $(a,b) \subseteq (0,1)$; allora esiste un r_m razionale in (a,b), e si ha che per ogni $x \in (r_m, b)$ si ha $f(x-r_m) = (x-r_m)^{-1/2}$, e quindi $g(x) \geq 2^{-m}(x-r_m)^{-1/2}$, e $\lim_{x \searrow r_m} g(x) \geq +\infty$; questo implica che g non è limitata in (a,b) (e che g quindi non può essere continua in (a,b)). (3 punti)

4. $g^2 < \infty$ q.o. per il punto (1) (0,5 punti); ma:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g^2 \, dx &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n} \int_{\mathbb{R}} f^2(x-r_n) \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n} \int_0^1 x^{-1} \, dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 x^{-1} \, dx = \frac{1}{3} \lim_{k\to\infty} \int_{1/k}^1 x^{-1} \, dx = \frac{1}{3} \lim_{k\to\infty} [\log x]_{1/k}^1 = +\infty \end{aligned}$$

quindi $g \notin L^2$. (1,5 punti)

B.3 Prova scritta dell'11 giugno 1999

Siano $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ spazi misurati σ-finiti.

1. Se $f : X \to \mathbb{R}$ è $\mathcal{M}$-misurabile e $g : Y \to \mathbb{R}$ é $\mathcal{N}$-misurabile, e $h = f \otimes g$ (cioé h è definita su $X \times Y$ come $h(x,y) = f(x)g(y)$), allora h è $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$-misurabile.

2. Enunciare i teoremi di Fubini e di Tonelli.

3. Se $f \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $g \in L^1(Y, \mathcal{N}, \nu)$, allora $h \in L^1(X \times Y, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, \mu \otimes \nu)$ e

$$\int_{X \times Y} h \, d\mu \otimes \nu = \int_X f \, d\mu \int_Y g \, d\nu$$

(suggerimento: usare il teorema di Tonelli per dimostrare che $h \in L^1$ e il teorema di Fubini per il resto della tesi).

Soluzione

1. h è composizione delle proiezioni su X e Y, delle f e g e della funzione prodotto da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$. Tutte queste funzioni sono misurabili, quindi h è misurabile (nota: h era definita come $h : X \times Y \in \mathbb{R})$. (3 punti)

2. Vedi dispense (2 punti)

3. Dire che $h \in L^1$ è equivalente a dire che $\int |h| < \infty$. Siccome $|h| \in L^+$, per Tonelli si ha:

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} |h| \, d\mu \otimes \nu &= \int_X \left(\int_Y |f(x)||g(y)| \, d\nu(y) \right) \, d\mu(x) = \\ &= \int_X |f(x)| \left(\int_Y |g(y)| \, d\nu(y) \right) \, d\mu(x) = \\ &= \int_X |f(x)| \|g\|_{L^1} \, d\mu(x) = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} < +\infty \end{aligned}$$

e quindi $h \in L^1$. A questo punto basta applicare il teorema di Fubini in modo analogo e si ottiene il resto della tesi. (3 punti)

B.4 Prova scritta del 2 luglio 1999

Sia dato uno spazio misurabile $(X, \mathcal{M})$. Se μ e ν sono misure definite su $(X, \mathcal{M})$, diciamo che μ è **assolutamente continua** rispetto a ν (e lo indichiamo con $\mu << \nu$) se $\nu(A) = 0$ implica $\mu(A) = 0$. Diciamo che μ e ν sono **equivalenti** (e lo indichiamo con $\mu \sim \nu$) se $\mu << \nu$ e $\nu << \mu$.

1. Se λ è un'altra misura su $(X, \mathcal{M})$, provare che $\lambda << \mu$ e $\mu << \nu$ implica $\lambda << \nu$ e che $\lambda \sim \mu$ e $\mu \sim \nu$ implica $\lambda \sim \nu$

2. Provare che se μ è una misura definita da $\mu(A) = \int_A f \, d\nu$, con $f \in L^+(X, \mathcal{M})$, allora $\mu << \nu$.

3. Provare che se nel punto (2) $f > 0$ ν-quasi ovunque, allora $\mu \sim \nu$.

4. Provare che se $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{1}_{E_n}$, con $a_n > 0$ ed $(E_n)_n$ disgiunti e tali che $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = X$, allora
$$\nu(A) = \int_A \frac{1}{f} \, d\mu$$

Soluzione

1. Se $\lambda << \mu$ e $\mu << \nu$, allora la seconda relazione implica che se $\nu(A) = 0$, allora $\mu(A) = 0$; allora per la prima relazione si ha che $\lambda(A) = 0$, e quindi abbiamo che $\nu(A) = 0$ implica $\lambda(A) = 0$, cioé che $\lambda << \nu$. Se poi $\lambda \sim \mu$ e $\mu \sim \nu$, allora abbiamo che $\lambda << \mu$ e $\mu << \nu$, quindi $\lambda << \nu$ per quanto appena dimostrato, e che $\mu << \lambda$ e $\nu << \mu$, quindi $\nu << \lambda$; mettendo assieme le due relazioni si ha la tesi. (2 punti)

2. Se $\nu(A) = 0$, allora $\mu(A) = \int_X f \mathbf{1}_A \, d\nu$; ma $f\mathbf{1}_A = 0$ μ-quasi ovunque, quindi $\mu(A) = 0$. (2 punti)

3. Se $\mu(A) = 0$, allora $\int_X f \mathbf{1}_A \, d\nu = 0$; siccome $f \mathbf{1}_A \in L^+$, questo implica che $f \mathbf{1}_A = 0$ μ-quasi ovunque; siccome $f > 0$, questo significa che $\mathbf{1}_A = 0$ μ-quasi ovunque, e abbiamo la tesi. (2 punti)

4. Siccome f vale $a_n > 0$ su E_n, allora $1/f$ vale $1/a_n$ su E_n. Allora:
$$\begin{aligned}
\int_A \frac{1}{f} \, d\mu &= \int_A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \mathbf{1}_{E_n} \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \frac{1}{a_n} \mathbf{1}_{E_n \cap A} \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \mu(E_n \cap A) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \int_{E_n \cap A} f \, d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \int_{E_n \cap A} a_n \, d\nu = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} a_n \nu(E_n \cap A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n \cap A) = \nu(A) \quad \text{(2 punti)}
\end{aligned}$$

B.5 Prova scritta del 10 settembre 1999

1. Si enuncino i teoremi di Beppo Levi e della convergenza dominata di Lebesgue.

2. Se $\mu(X) < +\infty$, $(f_n)_n \subset L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $f_n \to f$ uniformemente, mostrare che $f \in L^1(X, \mathcal{M}, \mu)$ e che $\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f_n \, d\mu$.

Soluzione

1. Vedi dispense (4 punti).

2. $f_n \to f$ uniformemente, quindi $f_n \to f$ μ-quasi ovunque, quindi f è misurabile. Inoltre per ogni n, $|f| \leq |f - f_n| + |f_n|$, e per ogni ε esiste n tale che $|f - f_n| < \varepsilon$ su X. Allora $|f| \leq |f - f_n| + |f_n| < \varepsilon + |f_n|$, e quindi $\int_X |f| \, d\mu < \varepsilon\mu(X) + \int_X |f_n| \, d\mu$. Siccome $f_n \in L^1$, allora $\int_X |f| \, d\mu < +\infty$, quindi $f \in L^1$. Infine $|\int_X f \, d\mu - \int_X f_n \, d\mu| = |\int_X (f - f_n) \, d\mu| \leq \int_X |f - f_n| \, d\mu \leq \varepsilon\mu(X)$. Da questo si ricava che $\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu$ (4 punti).

B.6 Prova scritta del 27 settembre 1999

1. Si enuncino i teoremi di Beppo Levi e della convergenza dominata di Lebesgue.

2. Calcolare il limite
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{+\infty} \frac{n}{1 + n^2 x^2} \, dx$$
per $a > 0$, $a = 0$ e $a < 0$.

Suggerimento: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \pi$.

Soluzione

1. Vedi dispense (2 punti)

2. Se $a > 0$, abbiamo:
$$f_n(x) = \frac{n}{1 + n^2 x^2} \leq \frac{1}{nx^2} \leq \frac{1}{x^2} \in L^1(a, +\infty)$$
e quindi possiamo applicare Lebesgue; siccome $f_n \to 0$ q.o. su $[a, +\infty)$, il limite vale 0 (2 punti).

   Se $a = 0$, siccome le f_n sono pari si ha:
$$\int_0^{+\infty} \frac{n}{1 + n^2 x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{1 + n^2 x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + y^2} \, dy = \frac{\pi}{2}$$
e quindi il limite vale $\pi/2$ (2 punti).

Se $a < 0$, si ha:

$$\int_a^{+\infty} \frac{n}{1+n^2x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{1+n^2x^2}\,dx - \int_{-\infty}^{a} \frac{n}{1+n^2x^2}\,dx = \pi - \int_{-\infty}^{a} \frac{n}{1+n^2x^2}\,dx$$

Il secondo addendo tende a 0 per un ragionamento analogo al caso $a > 0$, quindi il limite vale π. (2 punti)

Gli integrali si potevano anche calcolare esplicitamente nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \frac{n}{1+n^2x^2}\,dx &= \int_a^{+\infty} \lim_{k\to\infty} \mathbf{1}_{[a,k]}(x)\frac{n}{1+n^2x^2}\,dx = \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_a^{+\infty} \mathbf{1}_{[a,k]}(x)\frac{n}{1+n^2x^2}\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{na}^{nk} \frac{1}{1+y^2}\,dy = \\ &= \lim_{k\to\infty} [\operatorname{arctg} y]_{na}^{nk} = \lim_{k\to\infty} (\operatorname{arctg} nk - \operatorname{arctg} na) = \operatorname{arctg} \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} na \end{aligned}$$

dove l'inversione di limite e integrale si è potuta fare grazie a Beppo Levi, e si è potuto usare la primitiva di $\frac{1}{1+y^2}$ grazie al fatto che si stava integrando una funzione limitata su un dominio limitato. A questo punto il limite per $n \to \infty$ ha i risultati visti sopra a seconda che $a > 0$, $a = 0$ o $a < 0$.

B.7 Prova scritta del 26 gennaio 2000

Supponiamo che f_n e f siano funzioni misurabili da uno spazio $(X, \mathcal{M}, \mu)$ a valori complessi e $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

1. Se φ è continua e $f_n \to f$ quasi ovunque, allora anche $\varphi \circ f_n \to \varphi \circ f$ quasi ovunque.
2. Enunciare la definizione di convergenza in misura e quali sono le implicazioni tra le convergenze in misura, in L^1, quasi ovunque e uniforme.
3. Se φ è uniformemente continua e $f_n \to f$ uniformemente (risp. in misura), allora $\varphi \circ f_n \to \varphi \circ f$ uniformemente (risp. in misura).
4. (facoltativo) Esibire controesempi nel caso che φ non sia continua o uniformemente continua.

Soluzione

1. $f_n \to f$ q.o. significa che esiste $E \in \mathcal{M}$ tale che $\mu(E^c) = 0$ e $f_n(x) \to f(x)$ per ogni $x \in E$. Siccome φ è continua, è continua per successioni, e quindi $\varphi(f_n(x)) \to \varphi(f(x))$ (2 punti)
2. Vedi dispense (2 punti).

3. φ uniformemente continua significa che $\forall\varepsilon\exists\delta$ tale che $|y_1 - y_2| < \delta$ implica $|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)| < \varepsilon$; allora se $f_n \to f$ uniformemente significa che $\exists n^*$ tale che per ogni $x \in X$, $|f_n(x) - f(x)| < \delta \quad \forall n > n^*$, e quindi $|\varphi(f_n(x)) - \varphi(f(x))| < \varepsilon$ (1 punto). Se invece $f_n \xrightarrow{\mu} f$, questo implica che $\mu\{x : |f_n(x) - f(x)| > \delta\} \to 0$; siccome $|f_n(x) - f(x)| < \delta$ implica $|\varphi(f_n(x)) - \varphi(f(x))| < \varepsilon$, abbiamo che $|\varphi(f_n(x)) - \varphi(f(x))| > \varepsilon$ implica $|f_n(x) - f(x)| > \delta$, quindi $\{x : |\varphi(f_n(x)) - \varphi(f(x))| > \delta\} \subseteq \{x : |f_n(x) - f(x)| > \delta\}$, e quindi $\mu\{x : |\varphi(f_n(x)) - \varphi(f(x))| > \delta\} \subseteq \mu\{x : |f_n(x) - f(x)| > \delta\} \to 0$ (3 punti)

4. Prendiamo $f_n \equiv 1/n$, $f \equiv 0$ e $\varphi = \mathbf{1}_{\{0\}}$; allora φ non è continua e $\varphi \circ f_n \equiv 0$ e $\varphi \circ f = 1$, e non si ha convergenza quasi ovunque. Prendiamo poi $f_n(x) = x + 1/n$, $f(x) = x$ e $\varphi(x) = x^2$. Allora $\varphi \circ f_n - \varphi \circ f = 2x/n + 1/n^2$, e quindi non si ha né convergenza uniforme né in misura (1 punto a controesempio per un totale di 3)

B.8 Prova scritta del 18 febbraio 2000

1. Enunciare i teoremi di Fubini e di Tonelli.

2. Se f è integrabile secondo Lebesgue su $(0, a)$ e $g(x) = \int_x^a f(t)/t \, dt$, allora g è integrabile su $(0, a)$ e $\int_0^a g(x)\, dx = \int_0^a f(x)\, dx$.

Soluzione

1. Vedi dispense (2 punti).

2. Per potere applicare Fubini bisogna dimostrare che $\mathbf{1}_A f(t)/t \in L^1(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), m_2)$, dove abbiamo posto $A = \{(x,t) | 0 < x \le t < a\}$. Siccome A e f sono misurabili, $|\mathbf{1}_A f(t)/t| \in L^+(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), m_2)$, e per il teorema di Tonelli abbiamo

$$\int_A \left|\frac{f(t)}{t}\right| \, dt = \int_0^a \int_0^t \frac{|f(t)|}{t} \, dx \, dt = \int_0^a \frac{|f(t)|}{t} \int_0^t dx \, dt = \int_0^a |f(t)| \, dt < +\infty$$

quindi $\mathbf{1}_A f(t)/t \in L^1(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), m_2)$. Questo implica che

$$\int_0^a |g(x)| \, dx \le \int_0^a \int_x^a \left|\frac{f(t)}{t}\right| \, dt = \int_A \left|\frac{f(t)}{t}\right| \, dt < +\infty$$

cioé g è integrabile su $(0, a)$ (l'uguaglianza segue dal teorema di Tonelli) (3 punti). Siccome $\mathbf{1}_A f(t)/t \in L^1(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2), m_2)$, si può applicare il teorema di Fubini e si ha

$$\int_0^a g(x) \, dx \le \int_0^a \int_x^a \frac{f(t)}{t} \, dt = \int_0^a \int_0^t \frac{f(t)}{t} \, dx \, dt = \int_0^a f(t) \, dt$$

(3 punti)

B.9 Prova scritta del 14 giugno 2000

Consideriamo gli spazi misurabili $(X, \mathcal{M}) = (Y, \mathcal{N}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, dotati rispettivamente delle misure $\mu =$ misura di Lebesgue e $\nu =$ misura che conta i punti (definita come $\nu(A) =$ cardinalità di A).

1. Enunciare i teoremi di Fubini e di Tonelli.
2. Posto $D = \{(x, y) \in X \times Y \mid x = y\}$, calcolare i due integrali $\int\int \mathbf{1}_D \; d\mu \; d\nu$ e $\int\int \mathbf{1}_D \; d\nu \; d\mu$.
3. Come si concilia il risultato del punto (2) con i teoremi di Fubini e Tonelli?
4. (facoltativo e difficile) Calcolare l'integrale $\int \mathbf{1}_D \; d(\mu \otimes \nu)$.

Soluzione

1. Vedi dispense (2 punti).
2. $$\begin{aligned}\int_{[0,1]}\int_{[0,1]} \mathbf{1}_D(x,y) \; d\mu(x) \; d\nu(y) &= \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \mathbf{1}_{x=y} \; d\mu(x) \right) d\nu(y) = \\ = \int_{[0,1]} \mu(\{y\}) \; d\nu(y) &= \int_{[0,1]} 0 \; d\nu(y) = 0 \quad \text{(2 punti)}\end{aligned}$$

   $$\begin{aligned}\int_{[0,1]}\int_{[0,1]} \mathbf{1}_D(x,y) \; d\nu(x) \; d\mu(y) &= \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \mathbf{1}_{x=y} \; d\nu(x) \right) d\mu(y) = \\ = \int_{[0,1]} \nu(\{x\}) \; d\mu(y) &= \int_{[0,1]} 1 \; d\mu(y) = 1 \quad \text{(2 punti)}\end{aligned}$$
3. Y non è σ-finito, quindi le ipotesi dei due teoremi non sono verificate, e quindi non dobbiamo attenderci che la tesi sia vera (2 punti).
4. La misura prodotto $\mu \otimes \nu$ è la restrizione a $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ della misura esterna

   $$(\mu \otimes \nu)^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \rho(E_n) \mid E_n \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}, A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right\}$$

   Se $D \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, questo significa che esistono $x < y$ tali che $[x, y]^2 \cap D \subseteq E_n$, e quindi $[x, y] \otimes [x, y] \subseteq E_n$. Ma si ha che $\mu \otimes \nu([x, y]^2) = \mu([x, y])\nu([x, y]) = (y - x) \cdot (+\infty) = +\infty$, quindi abbiamo

   $$(\mu \otimes \nu)^*(D) = \inf\{+\infty\} = +\infty$$

B.10 Prova scritta del 5 luglio 2000

Supponiamo di avere lo spazio misurato completo $(X, \mathcal{M}, \mu)$.

1. Enunciare la definizione di convergenza in misura e quali sono le implicazioni tra le convergenze in misura, in L^1, quasi ovunque e uniforme.
2. Provare che se $\mu(E_n) < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\mathbf{1}_{E_n} \to f$ in L^1, allora f è uguale (quasi certamente) alla funzione indicatrice di un insieme.
3. Provare che l'insieme del punto (2) è misurabile.

Soluzione

1. Vedi dispense (2 punti).
2. $\mathbf{1}_{E_n} \to f$ in L^1 implica che $\mathbf{1}_{E_n} \to f$ in misura, quindi esiste una sottosuccessione $(\mathbf{1}_{E_{n_k}})_k$ tale che $\mathbf{1}_{E_{n_k}} \to f$ quasi ovunque. Questo significa che per quasi ogni $x \in X$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{E_{n_k}}(x)$; ma $\mathbf{1}_{E_{n_k}}(x)$ è uguale a 0 o a 1, quindi $f(x)$ è quasi ovunque uguale a 0 o a 1. Se definiamo $E = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$, allora $f = \mathbf{1}_E$ quasi ovunque (4 punti).
3. f è limite quasi ovunque di funzioni misurabili, quindi è misurabile. Siccome $\{1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, questo significa che $E = f^{-1}(\{1\}) \in \mathcal{M}$ (2 punti).

B.11 Prova scritta del 21 settembre 2000

Supponiamo di avere lo spazio misurato completo $(X, \mathcal{M}, \mu)$.

1. Enunciare la definizione di convergenza in misura e quali sono le implicazioni tra le convergenze in misura, in L^1, quasi ovunque e uniforme.
2. Sia $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu =$ misura che conta i punti (cioé $\mu(B) = |B|$ per ogni $B \in \mathcal{M}$). Provare che $f_n \to f$ in misura se e solo se $f_n \to f$ uniformemente.

Soluzione

1. Vedi dispense (2 punti).
2. $\Rightarrow$) sappiamo che $\forall \varepsilon$, $\lim_{n\to\infty} \mu\{k : |f_n(k) - f(k)| > \varepsilon\} = 0$. Ma la successione $(\mu\{k : |f_n(k) - f(k)| > \varepsilon\})_n$ è a valori interi, quindi se ha limite nullo deve necessariamente accadere che $\exists n^*$ tale che per ogni $n > n^*$, $\mu\{k : |f_n(k) - f(k)| > \varepsilon\} = 0$; questo significa che $|f_n(k) - f(k)| < \varepsilon$ μ-quasi ovunque; siccome μ è la misura che conta i punti, $|f_n(k) - f(k)| < \varepsilon$ per ogni $k \in \mathcal{N}$ (4 punti).
3. $\Leftarrow$) sappiamo che $\forall \varepsilon \exists n^*$ tale che $n > n^*$ implica $|f_n(k) - f(k)| < \varepsilon$ per ogni $k \in \mathcal{N}$; allora $\mu\{k : |f_n(k) - f(k)| > \varepsilon\} = \mu(\emptyset) = 0$ per ogni $n > n^*$; questo implica che $f_n \xrightarrow{\mu} f$ (2 punti)

B.12 Prova scritta del 16 novembre 2000

1. Enunciare il teorema di integrazione per serie di funzioni reali generiche.

Se $f_n(x) = ae^{-nax} - be^{-nbx}$, con $0 < a < b$, provare che:

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n(x)|\ dx = +\infty$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)\ dx \neq \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\ dx$

Soluzione

1. Vedi dispense (2 punti).

2. Per ogni n, l'integrale di Lebesgue $\int_0^{\infty} |ae^{-nax} - be^{-nbx}|\ dx$ è un numero positivo finito o è uguale a $+\infty$. In entrambi i casi, è uguale all'integrale di Riemann di $|f_n|$, quindi possiamo fare il cambio di variabile $y = nx$, ottenendo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n(x)|\ dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^{\infty} |ae^{-ny} - be^{-ny}|\ dy$$

L'integrale $\int_0^{\infty} |ae^{-y} - be^{-y}|\ dy$ si puó raccogliere, sia che sia un numero finito che sia infinito. Si ottiene quindi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |f_n(x)|\ dx = \left(\int_0^{\infty} |ae^{-y} - be^{-y}|\ dy \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Siccome la serie armonica diverge e l'integrale è un numero diverso da zero, abbiamo la tesi (5 punti).

3. f_n è somma di due funzioni in $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$: infatti $e^{-n\lambda x}$ é una funzione misurabile e positiva per $\lambda = a, b$ e quindi i suoi integrali di Riemann e di Lebesgue coincidono, e si ha:

$$\int_0^{\infty} \lambda e^{-n\lambda x}\ dx = \left[-\frac{1}{n} e^{-n\lambda x} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{n}$$

quindi $f_n \in L^1$ e $\int_0^{\infty} ae^{-nax} - be^{-nbx}\ dx = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0$ per ogni $n \in \mathcal{N}$; allora $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_n(x)\ dx = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ (2 punti).

Calcoliamo ora $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Per ogni $x \in (0, \infty)$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ è la differenza di due serie assolutamente convergenti perché positive. Allora:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} ae^{-nax} - \sum_{n=1}^{\infty} be^{-nbx} = a \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-ax})^n - b \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-bx})^n = \\ &= \frac{a}{1 - e^{-ax}} - \frac{b}{1 - e^{-bx}} := f(x) \end{aligned}$$

Abbiamo che $\lim_{x\to\infty} f(x) = a - b < 0$, quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esiste M tale che $f(x) < a - b + \varepsilon$ per $x > M$. Allora

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f^-(x)\ dx &> \int_0^\infty (b-a-\varepsilon)\mathbf{1}_{(M,+\infty)}(x)\ dx = (b-a-\varepsilon)m((M,+\infty)) = \\ &= (b-a-\varepsilon)\cdot\infty = +\infty\end{aligned}$$

quindi se l'integrale di f esiste, sicuramente non è uguale a 0, e si ha la tesi (3 punti).

In realtà, l'integrale di f non esiste, poiché f in 0 è positiva ed ha un andamento asintotico simile a $1/x$, e quindi anche $\int_0^\infty f^+(x)\ dx = +\infty$.

B.13 Prova scritta del 21 dicembre 2000

Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurato, E un aperto di uno spazio vettoriale normato e $f : X \times E \to \mathbb{R}$.

1. Enunciare condizioni sufficienti su f affinché la funzione

$$F(y) = \int_X f(x,y)\ d\mu(y)$$

sia continua, e si abbia

$$\lim_{y\to\bar{y}} F(y) = \int_X \lim_{y\to\bar{y}} f(x,y)\ d\mu(y)$$

2. Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{y\to\infty} \int_0^y x^n \left(1 - \frac{x}{y}\right)^y\ dx = n!$$

(dare per noto che $\int_0^\infty x^n e^{-x}\ dx = n!$).

Soluzione

1. Vedi dispense (2 punti).

2. Abbiamo:

$$\int_0^y x^n \left(1-\frac{x}{y}\right)^y\ dx = \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,y]}(x)x^n\left(1-\frac{x}{y}\right)^y\ dx$$

Ponendo $f(x,y) = \mathbf{1}_{[0,y]}(x)x^n(1-x/y)^y$, possiamo tentare di applicare il teorema del punto 1. Abbiamo che:

$$\lim_{y\to\infty} \mathbf{1}_{[0,y]}(x)x^n\left(1-\frac{x}{y}\right)^y = x^n e^{-x}$$

Inoltre abbiamo che per ogni $y \geq 1$, la funzione $x \to \mathbf{1}_{[0,y]}(x)x^n(1-x/y)^y$ è dominata da $x^n e^{-x} \in L^1(0,\infty)$. Infatti per ogni $y \geq 1$ si ha che $(1-x/y)^y \leq e^{-x}$ é equivalente a $1-x/y \leq e^{-x/y}$. Ma la funzione $x \to e^{-x/y}$ é convessa per ogni $y \in \mathbb{R}$, e $x \to 1-x/y$ é la sua tangente in zero, quindi abbiamo che $1-x/y \leq e^{-x/y}$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, quindi in particolare $(1-x/y)^y \leq e^{-x}$ per $x \in [0,y]$. Allora $|\mathbf{1}_{[0,y]}(x)x^n(1-x/y)^y| \leq x^n(1-x/y)^y \leq x^n e^{-x}$. Possiamo quindi applicare il teorema, e otteniamo:

$$\lim_{y\to\infty} \int_0^y x^n \left(1-\frac{x}{y}\right)^y \, dx = \int_0^\infty \lim_{y\to\infty} \mathbf{1}_{[0,y]}(x)x^n \left(1-\frac{x}{y}\right)^y \, dx = \int_0^\infty x^n e^{-x} \, dx = n!$$

dove abbiamo usato il suggerimento del testo (6 punti).

B.14 Prova scritta del 20 febbraio 2001

Sia $(X, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio misurato, con $\mu(X) < +\infty$, e definiamo

$$\rho(f) = \int_X \frac{|f|}{1+|f|} \, d\mu$$

1. Enunciare la definizione di convergenza in misura.
2. Dimostrare che la funzione $(f,g) \to \rho(f-g)$ è una metrica sullo spazio delle funzioni misurabili su X (se identifichiamo due funzioni uguali q.o.).
3. Dimostrare che $\rho(f_n) \to 0$ se e solo se $f_n \to 0$ in misura.

Soluzione

1. Vedi dispense (2 punti).
2. Bisogna verificare che $\rho(f) \geq 0$, con l'uguaglianza se e solo se $f = 0$ q.o., e la disuguaglianza triangolare. Si ha che $\rho(f) = 0 \Leftrightarrow \frac{|f|}{1+|f|} = 0$ μ-q.o. (dato che $\frac{|f|}{1+|f|} \in L^+$) $\Leftrightarrow f = 0$ μ-q.o. (dato che $1+|f| > 0$) (1 punto). Inoltre, la funzione $x \to \frac{x}{1+x}$ è crescente, quindi abbiamo:

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} = \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Abbiamo quindi per ogni f, g, h funzioni misurabili:

$$\frac{|f-g|}{1+|f-g|} = \frac{|f-h+h-g|}{1+|f-h+h-g|} \leq \frac{|f-h|}{1+|f-h|} + \frac{|h-g|}{1+|h-g|}$$

Integrando entrambi i membri, si ottiene $\rho(f-g) \leq \rho(f-h) + \rho(h-g)$ (2 punti).

3. $\Leftarrow$) $f_n \to 0$ in misura, allora per ogni $\delta > 0$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\bar{n}$ tale che $n > \bar{n}$ implica $\mu\{x : |f_n(x)| > \delta\} < \varepsilon$. Allora per $n > \bar{n}$ si ha:

$$\begin{aligned} \rho(f_n) &= \int_X \frac{|f_n|}{1+|f_n|}\, d\mu = \int_{\{|f_n|>\delta\}} \frac{|f_n|}{1+|f_n|}\, d\mu + \int_{\{|f_n|\le\delta\}} \frac{|f_n|}{1+|f_n|}\, d\mu \le \\ &\le \int_{\{|f_n|>\delta\}} 1\, d\mu + \int_{\{|f_n|\le\delta\}} \delta\, d\mu < \varepsilon + \delta\mu(X) \end{aligned}$$

Siccome possiamo fissare ε e δ in modo arbitrariamente piccolo, segue che $\rho(f_n) \to 0$ (3 punti).

$\Rightarrow$) Se $\rho(f_n) \to 0$, prendiamo $\delta > 0$; siccome la funzione $x \to \frac{x}{1+x}$ è crescente, si ha

$$\begin{aligned} \rho(f_n) &= \int_{\{|f_n|>\delta\}} \frac{|f_n|}{1+|f_n|}\, d\mu + \int_{\{|f_n|\le\delta\}} \frac{|f_n|}{1+|f_n|}\, d\mu \ge \\ &\ge \int_{\{|f_n|>\delta\}} \frac{\delta}{1+\delta}\, d\mu = \frac{\delta}{1+\delta}\mu\{x : |f_n(x)| > \delta\} \end{aligned}$$

Siccome $\rho(f_n) \to 0$, allora anche $\mu\{x : |f_n(x)| > \delta\} \to 0$ (2 punti).

B.15 Prova scritta del 7 luglio 2001

1. Enunciare i teoremi di Fubini e di Tonelli.

2. Poniamo $(X, \mathcal{M}, \mu) = (Y, \mathcal{N}, \nu) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$, dove m é la misura di Lebesgue sulla retta. Definiamo inoltre $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ in questo modo:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-\frac{1}{2})^3} & \text{se } 0 < y < |x - \frac{1}{2}| \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Dire (giustificando la risposta) se le quantità

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dx\, dy, \qquad \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dy\, dx, \qquad \int_{[0,1]^2} f(x,y)\, dm_2(x,y)$$

sono uguali, dove m_2 é la misura di Lebesgue bidimensionale.

Soluzione

1. Vedi dispense (2 punti).

2. Se $f \in L^1([0,1]^2, \mathcal{B}([0,1]^2), m_2)$, allora i tre integrali sono uguali. Siccome f è simmetrica rispetto alla retta $x = 1/2$ (cioè $f(1/2+x) = -f(1/2-x)$) ed è positiva per $x > 1/2$ e negativa per $x < 1/2$, per verificare se $f \in L^1([0,1]^2, \mathcal{B}([0,1]^2), m_2)$ basta verificare che $f \in L^1([0,1/2) \times [0,1], \mathcal{B}([0,1/2) \times [0,1]), m_2)$. Per il teorema di Tonelli,

l'integrale sull'insieme $[0,1/2)\times[0,1]$ è uguale all'integrale calcolato prima rispetto ad una variabile, poi rispetto all'altra:

$$\begin{aligned}\int_{[0,1/2)\times[0,1]} f(x,y)\ dm_2(x,y) &= \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\ dx\ dy = \\ &= \int_0^{1/2}\int_0^y \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^3}\ dx\ dy = \int_0^{1/2}\left[\frac{-1}{2(x-\frac{1}{2})^2}\right]_0^y dy = \\ &= \int_0^{1/2}\left(2-\frac{1}{2(y-\frac{1}{2})^2}\right) dy = -\infty\end{aligned}$$

pertanto $f \notin L^1([0,1/2)\times[0,1],\mathcal{B}([0,1/2)\times[0,1]),m_2)$, e di conseguenza $f \notin L^1([0,1]^2,\mathcal{B}([0,1]^2),m_2)$, e l'integrale $\int_{[0,1]^2} f(x,y)\ dm_2(x,y)$ non è definito (3 punti). È facile vedere che $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\ dx\ dy = 0$: infatti

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\ dx\ dy &= \int_0^{1/2}\left(\int_0^y \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^3}\ dx + \int_{1-y}^1 \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^3}\ dx\right) dy = \\ &= \int_0^{1/2} g(y)\ dy = 0\end{aligned}$$

dove $g(y) = \int_0^y \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^3}\ dx + \int_{1-y}^1 \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^3}\ dx = 0$ su $(0,1/2]$ e non è definita su 0 (2 punti). Infine, $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\ dy\ dx$ non è definito: infatti

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\ dy\ dx = \int_0^{1/2}\int_0^x \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^3}\ dy\ dx + \int_{1/2}^1\int_0^{x-1/2} \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^3}\ dy\ dx$$

Avevamo però già visto che il primo addendo risultava uguale a $-\infty$, e per simmetria il secondo addendo risulta uguale a $+\infty$ (1 punto).

B.16 Prova scritta del 9 settembre 2001

1. Enunciare le definizioni di convergenza quasi ovunque e in misura per uno spazio misurato $(X,\mathcal{M},\mu)$.
2. Supponiamo che $f_n \to f$ e $g_n \to g$ in misura. Dimostrare che $f_n + g_n \to f + g$ in misura.
3. Supponiamo che $f_n \to f$ e $g_n \to g$ quasi ovunque. Dimostrare che $f_n g_n \to fg$ quasi ovunque.

Soluzione

1. Vedi dispense (4 punti).

2. Fissiamo $\varepsilon > 0$, e chiamiamo $A_n = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$, $B_n = \{x \in X : |g_n(x) - g(x)| > \varepsilon\}$ e $C_n = \{x \in X : |f_n(x) + g_n - f(x) - g(x)| > \varepsilon\}$. Abbiamo allora $C_n \subseteq A_n \cup B_n$, quindi

$$\mu(C_n) \leq \mu(A_n \cup B_n) \leq \mu(A_n) + \mu(B_n)$$

L'ultimo membro tende a zero per $n \to \infty$, e quindi $\mu(C_n)$ tende a zero per $n \to \infty$, e quindi si ha la tesi (2 punti).

3. Chiamiamo A l'insieme su cui $(f_n)_n$ non converge a f e B l'insieme su cui $(g_n)_n$ non converge a g. Allora $\mu(A) = \mu(B) = 0$. Si ha poi che su $A^c \cap B^c$ la successione $(f_n g_n)_n$ converge puntualmente a fg. Abbiamo che

$$\mu((A^c \cap B^c)^c) = \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) = 0$$

e quindi abbiamo la tesi (2 punti).

B.17 Prova scritta del 19 settembre 2001

1. Enunciare i teoremi di Fubini e di Tonelli.

2. Poniamo $(X, \mathcal{M}, \mu) = (Y, \mathcal{N}, \nu) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$, dove m é la misura di Lebesgue sulla retta. Definiamo inoltre $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ in questo modo:

$$f(x,y) = (1 - xy)^{-a}$$

dove $a > 0$. Dire (giustificando la risposta) se le quantità

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\ dx\ dy, \qquad \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\ dy\ dx, \qquad \int_{[0,1]^2} f(x,y)\ dm_2(x,y)$$

sono uguali, dove m_2 é la misura di Lebesgue bidimensionale.

3. Dire per quali a esiste finito

$$\int_{[0,1]^2} f(x,y)\ dm_2(x,y)$$

Soluzione

1. Vedi dispense (2 punti).

2. Siccome $f \in L^+([0,1]^2, \mathcal{B}([0,1]^2), m_2)$, per il teorema di Tonelli sicuramente i tre integrali sono uguali, sia che abbiano valore finito, sia che abbiano valore infinito (2 punti).

3. Per il punto 2, è sufficiente eseguire l'integrale calcolato prima rispetto ad una variabile, poi rispetto all'altra e vedere per quali a converge (1 punto). Se $a \neq 1$ si ha:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^1 \int_0^1 (1-xy)^{-a}\,dx\,dy = \int_0^1 \left[-\frac{(1-xy)^{1-a}}{y(1-a)}\right]_0^1 dy = \\ &= \int_0^1 \frac{1-(1-y)^{1-a}}{y(1-a)}\,dy\end{aligned}$$

Per $y \to 0$, la funzione integranda è indeterminata. Calcoliamone l'andamento asintotico con De l'Hôpital:

$$\lim_{y\to 0} \frac{1-(1-y)^{1-a}}{y(1-a)} = \lim_{y\to 0} \frac{(1-a)(1-y)^{-a}}{(1-a)} = \lim_{y\to 0}(1-y)^{-a}$$

quindi l'integrale converge in 0 per $a < 1$ (ricordiamo che $a > 0$ per ipotesi). Con questa ipotesi addizionale, in 1 la funzione integranda non ha singolarità, e quindi per $a \in (0,1)$ l'integrale esiste finito (2 punti). Esaminiamo ora il caso $a = 1$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-xy}\,dx\,dy = \int_0^1 \left[-\frac{\log(1-xy)}{y}\right]_0^1 dy = \\ &= \int_0^1 -\frac{\log(1-y)}{y}\,dy\end{aligned}$$

La funzione integranda converge a 1 per $y \to 0$, e tende a infinito per $y \to 1$; tuttavia, l'andamento asintotico per $y \to 1$ è logaritmico, pertanto l'integrale converge (1 punto). Possiamo quindi dire che l'integrale converge per $a \in (0,1]$.

Bibliografia

[1] H. Brezis, *Analisi funzionale: teoria e applicazioni*, Liguori, 1986

[2] G. Folland, *Real analysis: modern techniques and their applications*, John Wiley & Sons, 1984