Metodi Stocastici per la Finanza

Tiziano Vargiolu
vargiolu@math.unipd.it[1]

[1]Università degli Studi di Padova

Anno Accademico 2012-2013

Indice

Tipi di titoli

Supponiamo di avere 2 date, 0 (presente) e T (futuro). A seconda della possibile dinamica del prezzo dei titoli finanziari, possiamo dividerli in

- titolo senza rischio (bond):

$$B_T = B_0(1+r)$$

  al tempo 0 lo compro al prezzo B_0 e per il tempo $T > 0$ mi rende un tasso di interesse $r > 0$ certo e deterministico.
- titoli rischiosi (stocks): al tempo 0 compro un titolo rischioso al prezzo S_0, ma il suo valore S_T al tempo T è in generale aleatorio.

Esempio: nel caso piú semplice possiamo avere

$$\mathbb{P}\{S_T = U\} = p, \qquad \mathbb{P}\{S_T = D\} = 1 - p$$

con $0 < D < U$ e $p \in (0, 1)$.

Tipi di titoli (II)

- titoli **derivati**: usualmente con una scadenza, o maturità, $T > 0$, in cui il loro valore viene determinato in dipendenza da un titolo sottostante, detto **primario** (tipicamente bonds o stocks).

Esempio: Una **opzione call** su una azione S (es. FIAT) dà al possessore il diritto (ma non l'obbligo) di comprare 1 azione al **prezzo di esercizio** K alla **maturità** T. Quindi:

- se $S_T < K$, non conviene esercitare l'opzione: payoff $= 0$;
- se $S_T \geq K$, conviene esercitare l'opzione comprando il titolo al prezzo K e rivenderlo subito dopo al prezzo S_T: payoff $= S_T - K$.

Quindi all'istante T l'opzione darà un guadagno netto pari a $\max(S_N - K, 0) =: (S_T - K)^+$.
Una **opzione put** è definita in modo analogo ma dà il diritto di vendere invece che di comprare. Invertendo il ragionamento, il suo guadagno netto al tempo T sarà di $\max(K - S_T, 0) =: (K - S_T)^+$.

Portafogli (finanziari)

Un **portafoglio** è semplicemente una combinazione lineare di titoli. In particolare, al tempo 0 supponiamo di avere x unità di titolo senza rischio e y_i unità del titolo rischioso i-esimo (stocks o derivati), $i = 1, \dots, n$.

Valore del portafoglio ai tempi $t = 0, T$ (senza ribilanciamenti intermedi):

$$V_t^h = xB_t + \langle y, S_t \rangle$$

con $h := (x, y) \in \mathbb{R}^{1+n}$, $\langle y, S_t \rangle := \sum_{i=1}^n y_i S_t^i$.

- V_0 tipicamente è noto, e uguale al capitale iniziale, che alloco in titolo senza rischio e titoli rischiosi
- V_T è invece una variabile aleatoria.

Nota: in questo modello stiamo assumendo che non ci siano cosiddetti **bid-ask spread**, cioè intervalli tra prezzo di acquisto e prezzo di vendita, che sono quindi uguali in ogni periodo: di conseguenza non ci sono costi per le transazioni.

Possibili vincoli nei portafogli

Si puó supporre che $h = (x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ (possiamo investire come che vogliamo), oppure che siano presenti diversi **vincoli**:

- niente **prestiti**: $x \geq 0$;
- niente **vendite allo scoperto** (= vendere un titolo senza possederlo e sperare che perda per incassare la differenza): $y_i \geq 0$;
- comprare/vendere **quantitá intere** di titoli rischiosi: $y_i \in \mathbb{N}$ o $y_i \in \mathbb{Z}$;
- **ricchezza sempre positiva**: x e y devono essere tali che $V_t \geq 0$;
- altri ...

Arbitraggio

In un buon modello non dovrebbe essere possibile creare soldi dal nulla, cioè creare un portafogli che dia guadagni sicuri senza perdite. Difatti, se questo fosse possibile, tutti vorrebbero comprare un tale portafogli e di conseguenza non ci sarebbe nessuno che venderebbe (e quindi questo non sarebbe possibile). La formalizzazione matematica di questo concetto è la seguente.

Definizione: Un portafogli (x, y) si dice **arbitraggio** se:

1. $V_0^h = 0$,
2. $V_T^h \geq 0$ q.c., cioè $\mathbb{P}\{V_T^h \geq 0\} = 1$,
3. $\mathbb{P}\{V_T^h > 0\} > 0$.

Un modello di mercato finanziario di solito si considera buono se **non ammette la possibilità di arbitraggi al suo interno** (principio di non arbitraggio).

Relazioni per arbitraggio

Il principio di non arbitraggio permette di ricavare delle relazioni che legano prezzi di titoli derivati fra di loro e ai corrispondenti prezzi del titolo principale: queste relazioni sono generali e devono valere indipendentemente dal modello che genera i prezzi.
Le relazioni si basano tutte sul fatto che, se non fossero valide, allora si potrebbe costruire un portafoglio che, grazie alla non validitá della relazione, permetterebbe di realizzare un arbitraggio.
Il prototipo per queste relazioni può essere visto nel fatto che un portafoglio che al tempo T dà un prezzo non negativo (come ad esempio portafogli elementari costituiti da una singola call o put) deve avere un prezzo non negativo ad ogni tempo $t < T$.

Ipotesi

In genere, perché queste relazioni siano valide, sul mercato si fanno queste ipotesi:

- i titoli sul mercato sono tutti perfettamente divisibili: deve cioé essere possibile comprare e/o vendere una quantitá arbitrariamente grande o piccola dei titoli;
- é possibile vendere titoli allo scoperto, cioé non possedendoli: l'effetto di questo nel proprio portafoglio é che il valore di questa posizione sará l'opposto del valore della corrispondente posizione positiva (cioé lo stesso che moltiplicare per -1);
- per una data maturitá T esistano call e put con ogni prezzo di esercizio $K > 0$.

Portafogli con call e put

Le relazioni che presentiamo riguardano tutte prezzi di call e put presi all'istante 0 (e quindi con prezzo del sottostante S_0 fissato) con diversi prezzi di esercizio $K_1, \dots, K_m$. Chiamiamo $C_t(T, K)$ (rispettivamente $P_t(T, K)$) il prezzo al tempo $t = 0, T$ di una call (risp., put) con maturitá Te prezzo di esercizio $K(= K_1, \dots, K_m)$.
Con questi titoli possiamo costruire un portafogli con:

- x unità di titolo senza rischio B_t;
- y unità di titolo rischioso S_t;
- z_i call $C_t(T, K_i)$, con $i = 1, \dots, m$;
- w_i put $P_t(T, K_i)$, con $i = 1, \dots, m$.

Il nostro portafogli sarà quindi determinato dal vettore $h = (x, y, z_1, \dots, z_m, w_1, \dots, w_m)$, e il valore del portafogli da

$$V_t = xB_t + yS_t + \sum_{i=1}^{m} z_i C_t(T, K_i) + \sum_{i=1}^{m} w_i P_t(T, K_i), \quad t = 0, T$$

Paritá call - put

Questa relazione lega prezzi di call e put ai corrispondenti prezzi del sottostante e prezzi di esercizio.

Proposizione (parità call-put). Per ogni $K = K_1, \dots, K_m$ si ha

$$C_0(T,K) - P_0(T,K) = S_0 - K/B_T$$

Dimostrazione. Procediamo per assurdo. Definiamo

$$\delta := C_0(T,K) - P_0(T,K) - S_0 + K/B_T$$

Ora se $\delta = 0$ la relazione vale. Supponiamo invece che $\delta < 0$ e mostriamo che si può costruire un arbitraggio: poniamo difatti $h := (x, y, z, w)$ con

$$x := -\delta + K/B_T, \qquad y := -1, \qquad z := 1, \qquad w := -1,$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} V_0^h &= x + yS_0 + zC_0(T,K) + wP_0(T,K) = \\ &= -\delta + K/B_T - S_0 + C_0(T,K) - P_0(T,K) = 0, \end{aligned}$$

Dimostrazione (cont.)

$$
\begin{aligned}
V_T^h &= xB_T + yS_T + zC_T(T,K) + wP_T(T,K) = \\
&= xB_T - S_T + C_T(T,K) - P_T(T,K)
\end{aligned}
$$

Per come sono definite le call e le put, abbiamo che (vedi fig.)

$$
C_T(T,K) - P_T(T,K) = \left\{ \begin{array}{ll} S_T - K - 0 & \text{se } S_T \geq K, \\ 0 - K + S_T & \text{se } S_T \leq K, \end{array} \right\} = S_T - K
$$

Abbiamo quindi

$$
V_T^h = -\delta B_T + K - S_T + S_T - K = -\delta B_T > 0
$$

(ricordiamo infatti che $\delta < 0$), quindi h è un arbitraggio, il che va contro le ipotesi. Nel caso $\delta > 0$, è facile dimostrare che $-h$ (ossia il portafoglio costruito prendendo le posizioni opposte) è un arbitraggio.

Dimostrazione (cont.)

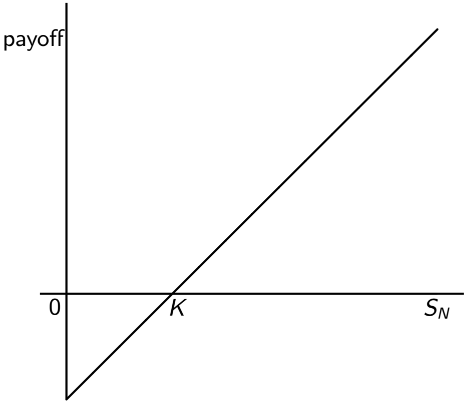


Figura: payoff $(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K$

Vincoli per una call

Corollario. Fissati $T > 0$ e $K = K_1, \ldots, K_m$, il prezzo di una call deve soddisfare i seguenti vincoli:

$$(S_0 - K/B_T)^+ \leq C_0(T, K) \leq S_0$$

Dimostrazione. La prima disuguaglianza segue dalla parità call-put e dal fatto che $P_0(N, K) \geq 0$: infatti

$$C_0(T, K) = S_0 - K/B_T + P_0(T, K) \geq S_0 - K/B_T$$

Siccome si ha anche $C_0(T, K) \geq 0$, abbiamo che

$$C_0(T, K) \geq \max(S_0 - K/B_T, 0) = (S_0 - K/B_T)^+$$

La seconda disuguaglianza segue dal fatto che, se costruiamo il portafoglio costituito da (1 titolo primario S) $-$ (1 call), allora questo portafoglio al tempo T darà il payoff $\max(S_T, K) \geq 0$, e quindi il suo prezzo dovrà essere maggiore di zero.

Vincoli per una put

Corollario. Fissati $T > 0$ e $K = K_1, \ldots, K_m$, il prezzo di una put deve soddisfare i seguenti vincoli:

$$(K/B_T - S_0)^+ \leq P_0(T, K) \leq K/B_T$$

Dimostrazione. La prima disuguaglianza segue dalla parità call-put e dal fatto che $C_0(T, K) \geq 0$ per ogni T, K: infatti

$$P_0(T, K) = K/B_T - S_0 + C_0(T, K) \geq K/B_T - S_0$$

e siccome anche $P_0(T, K) \geq 0$, abbiamo che

$$P_0(T, K) \geq \max(K/B_T - S_0, 0) = (K/B_T - S_0)^+$$

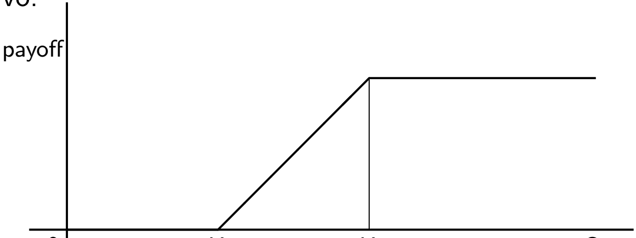
La seconda disuguaglianza segue dal fatto che, se costruiamo il portafoglio costituito da (K bonds) $-$ (1 put), allora questo portafoglio al tempo T darà il payoff $\max(S_T, K) \geq 0$, e quindi il suo prezzo dovrà essere maggiore di zero.

Monotonia di call e put rispetto a K

Fissato T, i prezzi delle call e delle put sono funzioni monotone rispetto al prezzo di esercizio. In particolare, i prezzi delle call decrescono al crescere di K e i prezzi delle put crescono.
Per dimostrare questa relazione per le call, prendiamo $K_1 < K_2$ e costruiamo il portafoglio costituito da

$$\text{(1 call con prezzo di esercizio } K_1) -$$
$$\text{(1 call con prezzo di esercizio } K_2).$$

Allora il suo payoff al tempo T sará
$(S_T - K_1)^+ - (S_T - K_2)^+ = \max(0, \min(S_T, K_2 - K_1))$, che é non negativo:



Convessitá dei prezzi di call e put rispetto a K

Fissato T, i prezzi delle call e delle put sono funzioni **convesse** rispetto al prezzo di esercizio: la definizione geometrica di questo concetto è per ogni $K_1 < K_3 < K_2$ si ha che $(K_3, C_0(T, K_3))$ nel piano cartesiano sta sotto al segmento di estremi $(K_1, C_0(T, K_1))$ e $(K_2, C_0(T, K_2))$.

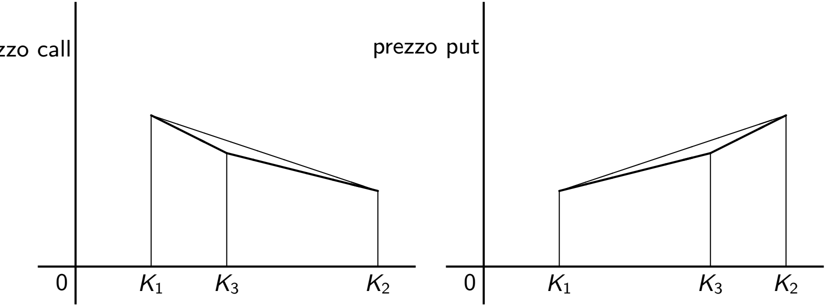


Figura: convessità di call e put rispetto a K

Convessitá dei prezzi di call e put rispetto a K (cont.)

In termini analitici, se $K_3 \in (K_1, K_2)$ allora esiste un unico $\lambda \in (0,1)$ (esplicitamente dato da $\lambda := \frac{K_3 - K_2}{K_1 - K_2}$) tale che $K_3 = \lambda K_1 + (1-\lambda)K_2$. Allora il punto di ascissa K_3 che sta sul segmento di estremi $(K_1, C_0(T, K_1))$ e $(K_2, C_0(T, K_2))$ ha coordinate $(K_3, \lambda C_0(T, K_1) + (1-\lambda)C_0(T, K_2))$.
Per dimostrare la convessità per le call, costruiamo il portafoglio costituito da

$$\begin{gathered} \lambda \text{ call con prezzo di esercizio } K_1 \\ +(1-\lambda) \text{ call con prezzo di esercizio } K_2 \\ -1 \text{ call con prezzo di esercizio } K_3. \end{gathered}$$

Allora il suo payoff al tempo T sará

$$\lambda(S_T - K_1)^+ + (1-\lambda)(S_T - K_2)^+ - (S_T - K_3)^+$$

che é non negativo: in particolare, è strettamente positivo per $K_1 < S_T < K_2$ e nullo altrimenti.

Convessitá dei prezzi di call e put rispetto a K (fig.)

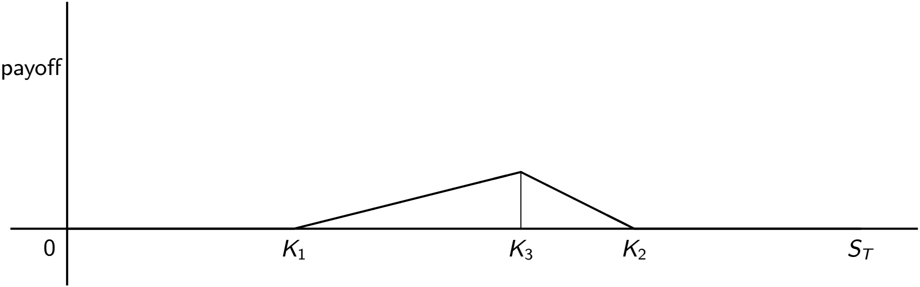


Figura: payoff $\lambda(S_T - K_1)^+ + (1-\lambda)(S_T - K_2)^+ - (S_T - K_3)^+$

Per il principio di non arbitraggio, quindi, questo portafoglio deve avere prezzo non negativo, e questo implica che

$$\lambda C_0(T, K_1) + (1-\lambda) C_0(T, K_2) \geq C_0(T, K_3) = C_0(T, \lambda K_1 + (1-\lambda) K_2)$$

Per dimostrare la relazione per le put, si procede esattamente come sopra.

Esercitazione

Scaricare prezzi di opzioni con diverso strike e tracciare su un foglio OpenOffice un grafico per controllare parità call-put, monotonia e convessità:

- collegarsi ad esempio al sito `finance.yahoo.com`
- digitare il nome di un titolo (es. Microsoft) nella maschera in alto a sinistra e premere il pulsante get quotes;
- nella spalla sinistra cliccare su Options;
- aprire un foglio di calcolo su OpenOffice e riportare nella prima colonna gli strike che si incontrano (dovrebbero essere da 24 a 34 sia per call che per put);
- nella seconda e terza colonna rispettivamente riportare i prezzi di call e put che appaiono nelle colonne last;
- nella quarta colonna verificare che ci sia la parità call-put;
- fare un grafico con le prime 3 colonne tracciando le funzioni $K \to C_0(T, K)$ e $K \to P_0(T, K)$; verificare monotonia, convessità e parità call-put.