Metodi Stocastici per la Finanza

Tiziano Vargiolu
vargiolu@math.unipd.it[1]

[1]Università degli Studi di Padova

Anno Accademico 2012-2013
Lezione 2

Indice

Equazione di Black-Scholes

Ricordiamo che nel modello di Black-Scholes(-Merton) il prezzo B_t al tempo t di un titolo senza rischio ha dinamica

$$dB_t = rB_t\ dt$$

e il prezzo S_t al tempo t di un titolo rischioso ha dinamica

$$dS_t = S_t(\mu\ dt + \sigma\ d\overline{W}_t)$$

con $\overline{W}$ moto browniano.
Se vogliamo prezzare un titolo derivato con payoff $h(S_T)$ al tempo T, allora il suo prezzo al tempo t è dato da $F(t, S_t)$, dove $F \in C^{1,2}([0, T) \times \mathbb{R})$ risolve l'**equazione di Black-Scholes(-Merton)**

$$\begin{cases} F_t + rsF_s + \frac{1}{2}s^2\sigma^2 F_{ss} = rF, & (t,s) \in [0, T) \times \mathbb{R}^+ \\ F(T,s) = h(s) & s \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Formula di Feynman-Kac

Dalla formula di Feynman-Kac, una soluzione $F \in C^{1,2}$ di

$$\begin{cases} F_t + rsF_s + \frac{1}{2}s^2\sigma^2 F_{ss} = rF, & (t,s) \in [0,T) \times \mathbb{R}^+ \\ F(T,s) = h(s) & s \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

si può rappresentare come

$$F(t, X_t) = \mathbb{E}[e^{-r(T-t)} h(X_T) \mid \mathcal{F}_t]$$

dove X è soluzione di

$$dX_t = X_t(r\ dt + \sigma\ dW_t)$$

con W moto browniano sotto $\mathbb{Q}$. Siccome

$$X_T = X_t \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)\right)$$

si può calcolare analiticamente F.

Prezzo nel modello di Black-Scholes

Se $X_t \equiv s$, si ha che

$$X_T = s \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}X\right)$$

cioè $X_T = \exp(m_t + \Sigma_t X)$, dove $X := \frac{\tilde{W}_T - \tilde{W}_t}{\sqrt{T-t}} \sim N(0,1)$,

$$\begin{aligned} m_t &:= \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \log s = \log(se^{r(T-t)}) - \frac{1}{2}\Sigma_t^2 \\ \Sigma_t &:= \sigma\sqrt{T-t} \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} F(t,s) &= \tilde{\mathbb{E}}[e^{-r(T-t)}h(X_T) \mid \mathcal{F}_t] = \\ &= e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}} h(e^{m_t + \Sigma_t y}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy \end{aligned}$$

Prezzaggio di una call (I)

Supponiamo ora che $h(s) = (s - K)^+$. Allora

$$
\begin{aligned}
F(t,s) &= e^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}} (e^{m_t + \Sigma_t y} - K)^+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \, dy = \\
&= e^{-r(T-t)} \int_d^{+\infty} (e^{m_t + \Sigma_t y} - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \, dy = \\
&= e^{-r(T-t)} \int_d^{+\infty} e^{m_t + \Sigma_t y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \, dy (=: (1)) - \\
&\quad -K e^{-r(T-t)} \int_d^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \, dy (=: (2))
\end{aligned}
$$

dove d è la minima soluzione di $e^{m_t + \Sigma_t d} \geq K \rightsquigarrow d := \frac{\log K - m_t}{\Sigma_t}$.
Calcoliamo separatamente (1) e (2), partendo da quest'ultimo.

Prezzaggio di una call (II)

$$
\begin{aligned}
(2) \quad &= -Ke^{-r(T-t)} \int_{d}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \, dy = \\
&= -Ke^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{-d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \, dy = \\
&= -Ke^{-r(T-t)} N(d_1)
\end{aligned}
$$

dove N è la funzione di ripartizione di una $N(0,1)$, e

$$
\begin{aligned}
d_1 \quad := \quad & -d = \frac{-\log K + m_t}{\Sigma_t} = \frac{-\log K + \log(se^{r(T-t)}) - \frac{1}{2}\Sigma_t^2}{\Sigma_t} = \\
= \quad & \frac{\log \frac{s}{Ke^{-r(T-t)}}}{\Sigma_t} - \frac{1}{2}\Sigma_t = \frac{\log \frac{s}{Ke^{-r(T-t)}}}{\sigma\sqrt{T-t}} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}
\end{aligned}
$$

Prezzaggio di una call (III)

$$
\begin{aligned}
(1) \quad &= e^{-r(T-t)} e^{m_t} \int_d^{+\infty} e^{\Sigma_t y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy = \\
&= e^{-r(T-t)+m_t+\frac{1}{2}\Sigma_t^2} \int_d^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y-\Sigma_t)^2}\, dy = \\
(z := y - \Sigma_t) \quad &= e^{-r(T-t)+\log(se^{r(T-t)})-\frac{1}{2}\Sigma_t^2+\frac{1}{2}\Sigma_t^2} \int_{d-\Sigma_t}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dy = \\
&= e^{-r(T-t)} s e^{r(T-t)} \int_{-\infty}^{-d+\Sigma_t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dy = \\
&= sN(d_0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{dove } d_0 \quad := \quad & -d + \Sigma_t = d_1 + \Sigma_t = \frac{\log \frac{s}{Ke^{-r(T-t)}}}{\Sigma_t} - \frac{1}{2}\Sigma_t + \Sigma_t = \\
= \quad & \frac{\log \frac{s}{Ke^{-r(T-t)}}}{\Sigma_t} + \frac{1}{2}\Sigma_t = \frac{\log \frac{s}{Ke^{-r(T-t)}}}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}
\end{aligned}
$$

Formula di Black-Scholes

Finalmente, mettendo tutto insieme, abbiamo

$$F(t, S_t) = S_t N(d_0) - Ke^{-r(T-t)} N(d_1)$$

con

$$d_{0,1} = \frac{\log \frac{S_t}{Ke^{-r(T-t)}}}{\sigma\sqrt{T-t}} \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}$$

Dove troviamo i parametri?

- S_t: prezzo di mercato
- r: tasso di mercato
- $T(-t)$, K: specificati da contratto
- σ: non osservato. . .

Qual è la σ giusta?

Supponiamo ora di risolvere questo problema reale: dover prezzare un titolo derivato (es. call) con scadenza T (in anni) quando il tasso di interesse annuale è r.
Come visto, la formula di Black-Scholes dà una dipendenza esplicita da parametri trovati sul mercato o fissati dal contratto, esclusa la volatilità σ.
Si pone quindi il problema di scegliere la σ giusta.
Due possibili approcci:

1. volatilità storica;
2. volatilità implicita.

Volatilità storica

La teoria della statistica dei processi ci consente, in base alle osservazioni passate, di stimare il parametro σ. Difatti

$$Y_t := \log S_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma \overline{W}_t$$

è un moto browniano con drift, per cui

$$\langle Y \rangle_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (Y_{t(i+1)/n} - Y_{ti/n})^2 = \sigma^2 t$$

Per stimare σ avendo le osservazioni del titolo S in $[0, t]$ basta allora definire la **volatilità storica**

$$\hat{\sigma}_n := \sqrt{\frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n} (Y_{t(i+1)/n} - Y_{ti/n})^2}$$

Allora $\hat{\sigma}_n \xrightarrow{\text{q.c.}} \sigma$ per $n \to \infty$.

Limiti della volatilità storica

Se si usa la volatilità storica per prezzare derivati, si ottengono prezzi *diversi* da quelli di mercato. Perchè?

- Il modello è giusto solo in prima approssimazione.
- La volatilità potrebbe dipendere dal tempo.
- La volatilità storica stima il *passato* $[0, t]$, mentre per prezzare il titolo ci interessa la volatilità *futura* $[t, T]$.

Qual è allora il metodo che si usa nei mercati?

Volatilità implicita

La procedura che si usa in pratica è la seguente:

1. fissiamo un particolare titolo derivato H, ad esempio $H(s) := (s - K)^+$, con K fissato;
2. per ogni $\sigma > 0$ avremo un prezzo $F(t, S_t; \sigma)$ diverso;
3. sul mercato si osserva un particolare prezzo per questo derivato $\tilde{C}(t, S_t)$;
4. il particolare valore $\tilde{\sigma}$ tale che $F(t, S_t; \tilde{\sigma}) = \tilde{C}(t, S_t)$ si chiama **volatilità implicita**.

La volatilità implicita è quindi il particolare parametro $\tilde{\sigma}$ che fa sì che il prezzo previsto dal modello $F(t, S_t; \tilde{\sigma})$ sia uguale a quello che si osserva sul mercato.

Limiti della volatilità implicita

Se il modello di Black-Scholes fosse quello corretto, allora questo parametro non dovrebbe dipendere dal particolare derivato X ma sarebbe una caratteristica inerente al modello di S, che dovrebbe essere lo stesso per ogni titolo derivato che ci si possa costruire sopra.
Quello che succede in pratica, e che ha il suggestivo nome di **effetto smile di volatilità**, è invece questo: preso un insieme di strumenti sul mercato (ad esempio l'insieme di tutte le opzioni call con maturità T ma diversi prezzi di esercizio $K_1, \ldots, K_m$, se si calcola la volatilità implicita per ognuno di questi strumenti non si ottiene una costante ma una quantità che dipende dal prezzo di esercizio.
In particolare, il grafico sembra avere un minimo intorno ad un valore centrale e ad aumentare man mano che ci si scosta da questo, con la caratteristica forma di un sorriso (**smile**).

Esercitazione

Fissata una maturità, trovare, per diversi prezzi di esercizio, la volatilità implicita rispetto ai prezzi delle call.
Più in dettaglio:

- aprire un foglio di calcolo e il sito `finance.yahoo.com`;
- nel foglio di calcolo impostare le colonne come segue:

A	B	C	D	E	F	G	H	I
prezzo	strike	maturità	tasso	vol	d0	d1	prezzo call	prezzi osservati

- prendere dal sito il tasso a 1 anno e metterlo in tutte le caselle della colonna D;
- sul sito cercare un titolo (ad esempio Microsoft) e vedere qual è la maturità più breve per le opzioni, mettendola nelle caselle della colonna C;
- riempire le caselle S_0 e K con i dati presi dal sito, risp. nelle colonne A (caselle tutte uguali a S_0) e B (caselle tutte diverse, corrispondenti a strike K_i liquidi);

Esercitazione (cont.)

- nella colonna E mettere un valore provvisorio in tutte le caselle (ad esempio 0.2);
- nelle colonne F e G implementare le formule per $d_{0,1}$ viste sopra;
- nella colonna H implementare la formula di Black-Scholes;
- nella colonna I copiare i prezzi di mercato. Tipicamente questi saranno diversi dai prezzi del modello in colonna H;
- usare ora Strumenti $\rightarrow$ Individua obbiettivo, e apparirà una maschera: nella prima casella mettere l'etichetta della casella del prezzo della call (es. H6), nella seconda il valore di mercato corrispondente al K che si sta usando (valore contenuto in I6), e nella terza l'etichetta della casella della volatilità (es. E6);
- nella casella della volatilità dovrebbe apparire la volatilità implicita;
- fare un grafico della volatilità implicita rispetto allo strike: sorride?