Metodi Stocastici per la Finanza

Tiziano Vargiolu
vargiolu@math.unipd.it[1]

[1]Università degli Studi di Padova

Anno Accademico 2012-2013
Lezione 3

Indice

Il modello binomiale di Cox-Ross-Rubinstein

Consideriamo un modello di Cox-Ross-Rubinstein, dove il titolo senza rischio evolve secondo

$$B_{k+1} = B_k(1+R), \qquad k = 1, \dots, n,$$

e il titolo rischioso secondo

$$S_{k+1} = S_k \xi_{k+1}, \qquad k = 1, \dots, n, \tag{1}$$

con $(\xi_k)_k$ i.i.d. con distribuzione, sotto $\mathbb{Q}$, data da

$$\mathbb{Q}\{\xi_k = u\} = q, \qquad \mathbb{Q}\{\xi_k = d\} = 1 - q$$

in modo che $\tilde{S} := S/B$ sia una martingala. Questo significa che $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\xi_n] = 1$, i.e.

$$q = \frac{1+R-d}{u-d}$$

Prezzaggio e copertura di opzioni europee

Allora il prezzo di un titolo derivato $H = h(S_n)$ al tempo k è dato da

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[B_0/B_n H \mid \mathcal{F}_k] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(1+R)^{-n} h(S_n) \mid S_k]$$

che si può calcolare agevolmente con un algoritmo binomiale.
Il portafoglio di copertura relativo al titolo rischioso al tempo k è

$$\Delta_k = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[B_0/B_n h(S_n) \mid S_{k+1} = S_k u] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[B_0/B_n h(S_n) \mid S_{k+1} = S_k d]}{S_k(u-d)}$$

Da Cox-Ross-Rubinstein a Black-Scholes

Si puó dimostrare che, per un'opportuna dipendenza di u, d, R e q, questo modello converge in legge ad un modello di Black-Scholes. L'idea é che, siccome passando al logaritmo si ha che

$$\log S_n = \log S_0 + \sum_{k=1}^{n} \log \xi_k$$

la somma delle variabili aleatorie indipendenti e limitate $(\log \xi_k)_{k=1,\dots,n}$ converge, per $n \to \infty$, ad una variabile aleatoria gaussiana, e quindi il prezzo del titolo ad una lognormale. Tuttavia, dato che la legge di $(\log \xi_k)_{k=1,\dots,n}$ non é costante ma dipende da n, non si puó usare direttamente il Teorema Limite Centrale per ottenere questo risultato.

Funzioni caratteristiche

Un modo abbastanza immediato é invece quello di passare per le funzioni caratteristiche: per semplicitá, verifichiamo solo che S_n (prezzo all'ultimo istante nel modello di Cox-Ross-Rubinstein) converge in legge verso $S(T)$ (prezzo all'ultimo istante T nel modello di Black-Scholes), dove ricordiamo che, sotto la misura martingala equivalente $\mathbb{Q}$,

$$dS(t) = S(t)(r\ dt + \sigma\ dW(t)), \qquad t \in [0, T]$$

Innanzitutto abbiamo

$$\begin{aligned} \phi_{\log S_n}(v) &= \mathbb{E}[e^{iv \log S_n}] = \mathbb{E}[e^{iv \log S_0}]\mathbb{E}[e^{iv \log \xi_k}]^n = \\ &= S_0^{iv}(qe^{iv \log u} + (1-q)e^{iv \log d})^n \end{aligned}$$

Scelta di u, d ed r

Scegliamo ora i parametri u, d ed r come nell'articolo originale di Cox-Ross-Rubinstein (1979): poniamo

$$u = u_n = e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}, \qquad d = d_n = e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}, \qquad R = R_n = e^{\frac{rT}{n}} - 1$$

dove σ è la volatilità e r è il tasso composto (annuale) nel modello di Black-Scholes. Allora abbiamo

$$\begin{aligned}
\phi_{\log S_n}(v) &= S_0^{iv}\left(qe^{iv\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} + (1-q)e^{-iv\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}\right)^n = \\
&= S_0^{iv}\left[q\left(1 + iv\sigma\sqrt{\frac{T}{n}} - \frac{1}{2}v^2\sigma^2\frac{T}{n} + o(n^{-1})\right) + \right. \\
&\qquad \left. +(1-q)\left(1 - iv\sigma\sqrt{\frac{T}{n}} - \frac{1}{2}v^2\sigma^2\frac{T}{n} + o(n^{-1})\right)\right]^n = \\
&= S_0^{iv}\left(1 - \frac{1}{2}v^2\sigma^2\frac{T}{n} + iv\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}(2q-1) + o(n^{-1})\right)^n
\end{aligned}$$

Approssimazione di q

Per continuare il calcolo, ci serve approssimare q:

$$
\begin{aligned}
q &= q_n = \frac{1+R_n-d_n}{u_n-d_n} = \frac{e^{\frac{rT}{n}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}}{e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}} = \\
&= \frac{1+\frac{rT}{n}+o(n^{-1}) - 1 + \sigma\sqrt{\frac{T}{n}} - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{T}{n} + o(n^{-1})}{1+\sigma\sqrt{\frac{T}{n}} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{T}{n} + o(n^{-1}) - 1 + \sigma\sqrt{\frac{T}{n}} - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{T}{n} + o(n^{-1})} = \\
&= \frac{\sigma + \left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\sqrt{\frac{T}{n}} + o(n^{-1/2})}{2\sigma + o(n^{-1/2})} = \\
&= \frac{1}{2} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{1}{2\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}} + o(n^{-1/2})
\end{aligned}
$$

e di conseguenza

$$
2q_n - 1 = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{1}{\sigma}\frac{T}{n} + o(n^{-1/2})
$$

Convergenza della funzione caratteristica

Concludendo,

$$\phi_{\log S_n}(v) = S_0^{iv}\left(1 - \frac{1}{2}v^2\sigma^2\frac{T}{n} + iv\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}(2q_n - 1) + o(n^{-1})\right)^n =$$

$$= \quad S_0^{iv}\left(1 - \frac{1}{2}v^2\sigma^2\frac{T}{n} + iv\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{n}} + o(n^{-1})\right)^n =$$

$$= \quad S_0^{iv}\left(1 - \frac{1}{2}v^2\sigma^2\frac{T}{n} + iv\frac{T}{n}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + o(n^{-1})\right)^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad S_0^{iv}\exp\left(iv\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T - \frac{1}{2}v^2\sigma^2 T\right)$$

che é la funzione caratteristica di una $N(\log S_0 + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T, \sigma^2 T)$.
Questo significa che S_n converge in legge verso

$$S(T) = S_0\exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T - \sigma W(T)\right)$$

Convergenza del prezzo di opzioni europee

Dato che banalmente

$$\frac{B_0}{B_n} = (1 + R_n)^{-n} = (1 + e^{\frac{rT}{n}} - 1)^{-n} = e^{-rT}$$

si ha che per ogni funzione h continua e limitata

$$\mathbb{E}\left[\frac{B_0}{B_n} h(S_n)\right] \xrightarrow{n\to\infty} \mathbb{E}[e^{-rT} h(S(T))]$$

Se più in generale chiamiamo

$$BS(t, s; T) := \mathbb{E}[e^{-r(T-t)} h(S_T) \mid S_t = s]$$

il prezzo Black-Scholes al tempo t di un claim che matura al tempo T quando il sottostante al tempo t vale s, si può dimostrare in modo analogo che

$$\mathbb{E}\left[\frac{B_k}{B_n} h(S_n) \mid S_k = s\right] \xrightarrow{n\to\infty} BS(t, s; T)$$

dove prendiamo $k = k_n$ tale che $\frac{k}{n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{t}{T}$ (es. $k := [\frac{nt}{T}]$).

Convergenza del portafoglio di copertura

Il modello di Cox-Ross-Rubinstein fornisce poi anche una buona approssimazione del portafoglio di copertura trovato nel modello di Black-Scholes.
Difatti possiamo approssimare il portafoglio di copertura di Cox-Ross-Rubinstein con

$$
\begin{aligned}
\Delta_n &= \frac{\mathbb{E}[\frac{B_{k+1}}{B_n}h(S_n) \mid S_{k+1} = S_k u_n] - \mathbb{E}[\frac{B_{k+1}}{B_n}h(S_n) \mid S_{k+1} = S_k d_n]}{S_k(u_n - d_n)} \\
&\simeq \frac{BS(t+\frac{1}{n}, S_k u_n; T) - BS(t+\frac{1}{n}, S_k d_n; T)}{S_k(u_n - d_n)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \\
&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\partial}{\partial s} BS(t, S_t; T)
\end{aligned}
$$

e quindi anche il portafoglio di copertura Cox-Ross-Rubinstein converge a quello Black-Scholes.

Esercitazione

Fissati prezzo iniziale S_0, tasso r, volatilità σ, strike K e maturità T, approssimare il prezzo di una call ottenuto con la formula di Black-Scholes con quello ottenuto con l'algoritmo binomiale.

Più in dettaglio:

- aprire un foglio di calcolo;
- nel foglio di calcolo impostare le colonne come segue:

D	E	F	G	H	I	J	K
prezzo	strike	maturità	tasso	vol	d0	d1	prezzo call

  (ad esempio prendendo il foglio di calcolo della volta scorsa e aggiungendo 3 colonne prima della colonna A, che quindi diventa colonna D)
- nella terza riga, implementare la formula di Black-Scholes come nella scorsa esercitazione; nella casella K3 dovrebbe comparire il prezzo di una call secondo la formula di Black-Scholes;

Esercitazione (cont.)

- impostare le prime tre colonne come segue:

A	B	C
Iterazioni	prezzo CRR	prezzo BS

- nella colonna A scrivere i numeri da 1 a 50;
- nella colonna B, implementare in VBA un algoritmo CRR per calcolare il prezzo di una call che abbia come input: prezzo iniziale, strike, maturità, tasso, volatilità e numero *n* di iterazioni;
- nella colonna C copiare il prezzo come da formula Black-Scholes (è sufficiente impostare =`K$2` in tutte le caselle)
- fare un grafico che contenga sia il prezzo CRR che quello BS in funzione delle iterazioni. Come converge il prezzo CRR?

VBA e Openoffice.org Basic

- Per accedere all'editor dei programmi in ambiente OpenOffice, andare su

  Tools → Macros → Organize Macros → OpenOffice.org Basic

  e si aprirà una maschera.
- Nella finestra Macro from selezionare (nomefile) → Standard e schiacciare i tasti New o Edit a destra a seconda che si voglia scrivere un nuovo programma o modificarne uno esistente.
- Se si sta importando un file con una macro preesistente, bisogna assicurarsi che il livello di protezione di OpenOffice permetta la sua esecuzione: andare su

  Tools → Options → Security → OpenOffice.org Security → Macro-Security

  e settare il livello su Medium.

Struttura di un programma

La struttura tipica di un programma VBA, e quindi anche OpenOffice.org BASIC, è la seguente:

```
Function nomefunzione(var1,...,varn)
(programma)
End Function
```

dove:

- `nomefunzione` è il nome con cui si vuole richiamare la funzione all'interno del foglio elettronico, che non deve essere uguale ad una funzione già presente;
- `var1`,...,`varn` sono i nomi delle variabili che si vogliono passare in input alla funzione;
- tra `Function` ed `End Function` ci sono le istruzioni per eseguire la procedura.