Metodi Stocastici per la Finanza

Tiziano Vargiolu
vargiolu@math.unipd.it[1]

[1]Università degli Studi di Padova

Anno Accademico 2013-2014
Lezione 4

Indice

Indice

Indice

Indice

Convergenza in legge

Uno strumento dei metodi numerici probabilistici è quello di approssimare la distribuzione di un processo X a valori in $\mathbb{R}^d$, che generalmente è soluzione di un'equazione differenziale stocastica del tipo

$$dX_t = b(X_t)\ dt + \sigma(X_t)\ dW_t \tag{1}$$

con processi stocastici X^n della forma $X^n_t := Y^n_{[nt]}$, dove, per ogni $n \geq 1$, Y^n è una catena di Markov omogenea con nucleo di transizione μ_n.

Come scegliere μ_n in modo opportuno?

Convergenza in legge

Uno strumento dei metodi numerici probabilistici è quello di approssimare la distribuzione di un processo X a valori in $\mathbb{R}^d$, che generalmente è soluzione di un'equazione differenziale stocastica del tipo

$$dX_t = b(X_t)\ dt + \sigma(X_t)\ dW_t \tag{1}$$

con processi stocastici X^n della forma $X_t^n := Y_{[nt]}^n$, dove, per ogni $n \geq 1$, Y^n è una catena di Markov omogenea con nucleo di transizione μ_n.

Come scegliere μ_n in modo opportuno?

Convergenza in legge

Uno strumento dei metodi numerici probabilistici è quello di approssimare la distribuzione di un processo X a valori in $\mathbb{R}^d$, che generalmente è soluzione di un'equazione differenziale stocastica del tipo

$$dX_t = b(X_t)\ dt + \sigma(X_t)\ dW_t \tag{1}$$

con processi stocastici X^n della forma $X_t^n := Y_{[nt]}^n$, dove, per ogni $n \geq 1$, Y^n è una catena di Markov omogenea con nucleo di transizione μ_n.

Come scegliere μ_n in modo opportuno?

Richiami sulle catene di Markov

Ricordiamo che un processo a tempi discreti $Y = (Y_n)_n$ a valori nello spazio misurabile $(E, \mathcal{E})$ si dice **catena di Markov (omogenea)** con **nucleo di transizione** μ se per ogni $h : E \to \mathbb{R}$ misurabile e limitata abbiamo

$$\mathbb{E}[h(Y_{k+1}) \mid Y_0, \ldots, Y_k] = \mathbb{E}[h(Y_{k+1}) \mid Y_k] = \int_E h(y)\mu(x, dy)\Big|_{x=Y_k}$$

dove $\mu : E \times \mathcal{E} \to [0, 1]$ ha le seguenti proprietà:

1. per ogni $x \in E$, l'applicazione $\mu(x, \cdot) : \mathcal{E} \to [0, 1]$ è una misura di probabilità;
2. per ogni $\Gamma \in \mathcal{E}$, l'applicazione $\mu(\cdot, \Gamma) : E \to [0, 1]$ è misurabile.

In questa definizione, il significato qualitativo è che la legge dell'immediato futuro (Y_{k+1}) condizionata al passato $(Y_0, \ldots, Y_k)$ è uguale alla legge dell'immediato futuro condizionata al presente (Y_k).

Richiami sulle catene di Markov

Ricordiamo che un processo a tempi discreti $Y = (Y_n)_n$ a valori nello spazio misurabile $(E, \mathcal{E})$ si dice **catena di Markov (omogenea)** con **nucleo di transizione** μ se per ogni $h : E \to \mathbb{R}$ misurabile e limitata abbiamo

$$\mathbb{E}[h(Y_{k+1}) \mid Y_0, \dots, Y_k] = \mathbb{E}[h(Y_{k+1}) \mid Y_k] = \int_E h(y)\mu(x, dy)\Big|_{x=Y_k}$$

dove $\mu : E \times \mathcal{E} \to [0, 1]$ ha le seguenti proprietà:

1. per ogni $x \in E$, l'applicazione $\mu(x, \cdot) : \mathcal{E} \to [0, 1]$ è una misura di probabilità;
2. per ogni $\Gamma \in \mathcal{E}$, l'applicazione $\mu(\cdot, \Gamma) : E \to [0, 1]$ è misurabile.

In questa definizione, il significato qualitativo è che la legge dell'immediato futuro (Y_{k+1}) condizionata al passato $(Y_0, \dots, Y_k)$ è uguale alla legge dell'immediato futuro condizionata al presente (Y_k).

Richiami sulle catene di Markov

Ricordiamo che un processo a tempi discreti $Y = (Y_n)_n$ a valori nello spazio misurabile $(E, \mathcal{E})$ si dice **catena di Markov (omogenea)** con **nucleo di transizione** μ se per ogni $h : E \to \mathbb{R}$ misurabile e limitata abbiamo

$$\mathbb{E}[h(Y_{k+1}) \mid Y_0, \dots, Y_k] = \mathbb{E}[h(Y_{k+1}) \mid Y_k] = \int_E h(y)\mu(x, dy)\Big|_{x=Y_k}$$

dove $\mu : E \times \mathcal{E} \to [0, 1]$ ha le seguenti proprietà:

1. per ogni $x \in E$, l'applicazione $\mu(x, \cdot) : \mathcal{E} \to [0, 1]$ è una misura di probabilità;
2. per ogni $\Gamma \in \mathcal{E}$, l'applicazione $\mu(\cdot, \Gamma) : E \to [0, 1]$ è misurabile.

In questa definizione, il significato qualitativo è che la legge dell'immediato futuro (Y_{k+1}) condizionata al passato $(Y_0, \dots, Y_k)$ è uguale alla legge dell'immediato futuro condizionata al presente (Y_k).

Richiami sulle catene di Markov

Ricordiamo che un processo a tempi discreti $Y = (Y_n)_n$ a valori nello spazio misurabile $(E, \mathcal{E})$ si dice **catena di Markov (omogenea)** con **nucleo di transizione** μ se per ogni $h : E \to \mathbb{R}$ misurabile e limitata abbiamo

$$\mathbb{E}[h(Y_{k+1}) \mid Y_0, \dots, Y_k] = \mathbb{E}[h(Y_{k+1}) \mid Y_k] = \int_E h(y)\mu(x, dy)\Big|_{x=Y_k}$$

dove $\mu : E \times \mathcal{E} \to [0, 1]$ ha le seguenti proprietà:

1. per ogni $x \in E$, l'applicazione $\mu(x, \cdot) : \mathcal{E} \to [0, 1]$ è una misura di probabilità;
2. per ogni $\Gamma \in \mathcal{E}$, l'applicazione $\mu(\cdot, \Gamma) : E \to [0, 1]$ è misurabile.

In questa definizione, il significato qualitativo è che la legge dell'immediato futuro (Y_{k+1}) condizionata al passato $(Y_0, \dots, Y_k)$ è uguale alla legge dell'immediato futuro condizionata al presente (Y_k).

Esempio: modello di Cox-Ross-Rubinstein

Il prezzo del titolo rischioso nel modello di Cox-Ross-Rubinstein è una catena di Markov secondo la definizione che abbiamo dato. Difatti, per ogni $h : E \to \mathbb{R}$ misurabile e limitata abbiamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[h(S_{k+1}) \mid S_0, \dots, S_k] &= \mathbb{E}[h(S_k \xi_{k+1}) \mid S_0, \dots, S_k] = \\ &= \mathbb{E}[h(S_k \xi_{k+1}) \mid S_k] = \\ &= ph(S_k u) + (1-p)h(S_k d)\end{aligned}$$

dove la seconda uguaglianza segue dall'indipendenza di ξ_{k+1} da $\xi_1, \dots, \xi_k$ e quindi da $S_1, \dots, S_k$. Abbiamo quindi che S è una catena di Markov con nucleo di transizione dato da

$$\mu(x, \Gamma) := p\delta_{xu}(\Gamma) + (1-p)\delta_{xd}(\Gamma)$$

Esempio: modello di Cox-Ross-Rubinstein

Il prezzo del titolo rischioso nel modello di Cox-Ross-Rubinstein è una catena di Markov secondo la definizione che abbiamo dato. Difatti, per ogni $h : E \to \mathbb{R}$ misurabile e limitata abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h(S_{k+1}) \mid S_0, \dots, S_k] &= \mathbb{E}[h(S_k \xi_{k+1}) \mid S_0, \dots, S_k] = \\ &= \mathbb{E}[h(S_k \xi_{k+1}) \mid S_k] = \\ &= p h(S_k u) + (1-p) h(S_k d) \end{aligned}$$

dove la seconda uguaglianza segue dall'indipendenza di ξ_{k+1} da $\xi_1, \dots, \xi_k$ e quindi da $S_1, \dots, S_k$. Abbiamo quindi che S è una catena di Markov con nucleo di transizione dato da

$$\mu(x, \Gamma) := p\delta_{xu}(\Gamma) + (1-p)\delta_{xd}(\Gamma)$$

Convergenza in legge di processi stocastici

Citiamo ora una condizione sufficiente sotto la quale abbiamo convergenza in legge dei processi stocastici $X_t^n := Y_{[nt]}^n$, dove, per ogni $n \geq 1$, $Y^n = (Y_k^n)_k$ è una catena di Markov su $\mathbb{R}^d$ con nucleo di transizione μ_n. Per farlo, definiamo:

$$
\begin{aligned}
b_n(x) &:= n \int_{|y-x|\leq 1} (y-x)\mu_n(x, \mathrm{d}y) = n\mathbb{E}_x[(Y_1^n - x)\mathbf{1}_{|Y_1^n - x|\leq 1}] \\
&\quad \text{(media locale)} \\
a_n(x) &:= n \int_{|y-x|\leq 1} (y-x)(y-x)^T \mu_n(x, \mathrm{d}y) = \\
&= n\mathbb{E}_x[(Y_1^n - x)(Y_1^n - x)^T \mathbf{1}_{|Y_1^n - x|\leq 1}] \quad \text{(covarianza locale)}
\end{aligned}
$$

e per ogni $\varepsilon > 0$,

$$
p_n^\varepsilon(x) := n\mu_n(x, \{y : |y-x| \geq \varepsilon\}) = n\mathbb{P}_x\{|Y_1^n - x| > \varepsilon\}
$$

(probabilità di salti ampi)

Convergenza in legge di processi stocastici

Citiamo ora una condizione sufficiente sotto la quale abbiamo convergenza in legge dei processi stocastici $X_t^n := Y_{[nt]}^n$, dove, per ogni $n \geq 1$, $Y^n = (Y_k^n)_k$ è una catena di Markov su $\mathbb{R}^d$ con nucleo di transizione μ_n. Per farlo, definiamo:

$$\begin{aligned} b_n(x) &:= n \int_{|y-x|\leq 1} (y-x)\mu_n(x, \mathrm{d}y) = n\mathbb{E}_x[(Y_1^n - x)\mathbf{1}_{|Y_1^n - x|\leq 1}] \\ & \text{(media locale)} \\ a_n(x) &:= n \int_{|y-x|\leq 1} (y-x)(y-x)^T \mu_n(x, \mathrm{d}y) = \\ &= n\mathbb{E}_x[(Y_1^n - x)(Y_1^n - x)^T \mathbf{1}_{|Y_1^n - x|\leq 1}] \quad \text{(covarianza locale)} \end{aligned}$$

e per ogni $\varepsilon > 0$,

$$p_n^\varepsilon(x) := n\mu_n(x, \{y : |y-x| \geq \varepsilon\}) = n\mathbb{P}_x\{|Y_1^n - x| > \varepsilon\}$$

(probabilità di salti ampi)

Convergenza in legge di processi stocastici

Citiamo ora una condizione sufficiente sotto la quale abbiamo convergenza in legge dei processi stocastici $X_t^n := Y_{[nt]}^n$, dove, per ogni $n \geq 1$, $Y^n = (Y_k^n)_k$ è una catena di Markov su $\mathbb{R}^d$ con nucleo di transizione μ_n. Per farlo, definiamo:

$$\begin{aligned} b_n(x) &:= n\int_{|y-x|\leq 1}(y-x)\mu_n(x,\mathrm{d}y) = n\mathbb{E}_x[(Y_1^n-x)\mathbf{1}_{|Y_1^n-x|\leq 1}] \\ &\quad \text{(media locale)} \\ a_n(x) &:= n\int_{|y-x|\leq 1}(y-x)(y-x)^T\mu_n(x,\mathrm{d}y) = \\ &= n\mathbb{E}_x[(Y_1^n-x)(Y_1^n-x)^T\mathbf{1}_{|Y_1^n-x|\leq 1}] \quad \text{(covarianza locale)} \end{aligned}$$

e per ogni $\varepsilon > 0$,

$$p_n^\varepsilon(x) := n\mu_n(x,\{y : |y-x| \geq \varepsilon\}) = n\mathbb{P}_x\{|Y_1^n - x| > \varepsilon\}$$

(probabilità di salti ampi)

Il risultato principale

Teorema. Sia $(X_t)_t$ un processo stocastico la cui dinamica é regolata dall'equazione (2) per $t \geq 0$, con $a = (a_{ij})_{i,j} = \sigma\sigma^T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ e $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ sono funzioni continue e tali che l'equazione (2) abbia soluzioni uniche in traiettoria per ogni dato iniziale X_0 variabile aleatoria in $\mathbb{R}^d$.
Per ogni $n \geq 1$ sia poi $\mu_n(x, \Gamma)$ il nucleo di transizione su $\mathbb{R}^d$ di una catena di Markov Y^n, e poniamo $X^n_t := Y^n_{[nt]}$.
Se le seguenti condizioni sono verificate:

$$
\begin{aligned}
a_n &\to a \text{ uniformemente sui compatti di } \mathbb{R}^d, \\
b_n &\to b \text{ uniformemente sui compatti di } \mathbb{R}^d, \\
p_n^\varepsilon &\to 0 \text{ uniformemente sui compatti di } \mathbb{R}^d \text{ per ogni } \varepsilon > 0, \\
Y_0^n &\to X_0 \text{ in legge;}
\end{aligned}
$$

allora $\{X^n\}$ converge in legge ad X.

Il risultato principale

Teorema. Sia $(X_t)_t$ un processo stocastico la cui dinamica é regolata dall'equazione (2) per $t \geq 0$, con $a = (a_{ij})_{i,j} = \sigma\sigma^T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ e $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ sono funzioni continue e tali che l'equazione (2) abbia soluzioni uniche in traiettoria per ogni dato iniziale X_0 variabile aleatoria in $\mathbb{R}^d$.
Per ogni $n \geq 1$ sia poi $\mu_n(x, \Gamma)$ il nucleo di transizione su $\mathbb{R}^d$ di una catena di Markov Y^n, e poniamo $X^n_t := Y^n_{[nt]}$.
Se le seguenti condizioni sono verificate:

$$
\begin{aligned}
a_n &\to a \text{ uniformemente sui compatti di } \mathbb{R}^d, \\
b_n &\to b \text{ uniformemente sui compatti di } \mathbb{R}^d, \\
p_n^\varepsilon &\to 0 \text{ uniformemente sui compatti di } \mathbb{R}^d \text{ per ogni } \varepsilon > 0, \\
Y_0^n &\to X_0 \text{ in legge;}
\end{aligned}
$$

allora $\{X^n\}$ converge in legge ad X.

Il risultato principale

Teorema. Sia $(X_t)_t$ un processo stocastico la cui dinamica é regolata dall'equazione (2) per $t \geq 0$, con $a = (a_{ij})_{i,j} = \sigma\sigma^T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ e $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ sono funzioni continue e tali che l'equazione (2) abbia soluzioni uniche in traiettoria per ogni dato iniziale X_0 variabile aleatoria in $\mathbb{R}^d$. Per ogni $n \geq 1$ sia poi $\mu_n(x, \Gamma)$ il nucleo di transizione su $\mathbb{R}^d$ di una catena di Markov Y^n, e poniamo $X_t^n := Y_{[nt]}^n$.
Se le seguenti condizioni sono verificate:

$$
\begin{aligned}
a_n &\to a \text{ uniformemente sui compatti di } \mathbb{R}^d,\\
b_n &\to b \text{ uniformemente sui compatti di } \mathbb{R}^d,\\
p_n^\varepsilon &\to 0 \text{ uniformemente sui compatti di } \mathbb{R}^d \text{ per ogni } \varepsilon > 0,\\
Y_0^n &\to X_0 \text{ in legge;}
\end{aligned}
$$

allora $\{X^n\}$ converge in legge ad X.

Il risultato principale

Teorema. Sia $(X_t)_t$ un processo stocastico la cui dinamica é regolata dall'equazione (2) per $t \geq 0$, con $a = (a_{ij})_{i,j} = \sigma\sigma^T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ e $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ sono funzioni continue e tali che l'equazione (2) abbia soluzioni uniche in traiettoria per ogni dato iniziale X_0 variabile aleatoria in $\mathbb{R}^d$. Per ogni $n \geq 1$ sia poi $\mu_n(x, \Gamma)$ il nucleo di transizione su $\mathbb{R}^d$ di una catena di Markov Y^n, e poniamo $X_t^n := Y_{[nt]}^n$. Se le seguenti condizioni sono verificate:

$$\begin{aligned}
a_n &\to a \text{ uniformemente sui compatti di } \mathbb{R}^d,\\
b_n &\to b \text{ uniformemente sui compatti di } \mathbb{R}^d,\\
p_n^\varepsilon &\to 0 \text{ uniformemente sui compatti di } \mathbb{R}^d \text{ per ogni } \varepsilon > 0,\\
Y_0^n &\to X_0 \text{ in legge;}
\end{aligned}$$

allora $\{X^n\}$ converge in legge ad X.

Esempio: da Cox-Ross-Rubinstein a Black-Scholes

Per ogni $n \geq 1$ consideriamo un modello di Cox-Ross-Rubinstein

$$S_{k+1}^n = S_k^n \xi_{k+1}^n, \qquad k \geq 1$$

con $(\xi_k^n)_k$ i.i.d. con distribuzione, sotto $\mathbb{Q}$, data da

$$\mathbb{Q}\{\xi_k^n = u\} = q_n, \qquad \mathbb{Q}\{\xi_k^n = d\} = 1 - q_n$$

dove ricordiamo che

$$q_n = \frac{1 + R_n - d_n}{u_n - d_n}, \qquad 1 - q_n = \frac{u_n - 1 - R_n}{u_n - d_n}$$

con $u_n = e^{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}}}$, $d_n = e^{-\sigma\sqrt{\frac{1}{n}}}$ e $R_n = e^{\frac{r}{n}} - 1$.
Vogliamo dimostrare che $X_t^n = S_{[nt]}^n$ converge in legge verso S_t soluzione di

$$dS_t = rS_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t$$

Esempio: da Cox-Ross-Rubinstein a Black-Scholes

Per ogni $n \geq 1$ consideriamo un modello di Cox-Ross-Rubinstein

$$S^n_{k+1} = S^n_k \xi^n_{k+1}, \qquad k \geq 1$$

con $(\xi^n_k)_k$ i.i.d. con distribuzione, sotto $\mathbb{Q}$, data da

$$\mathbb{Q}\{\xi^n_k = u\} = q_n, \qquad \mathbb{Q}\{\xi^n_k = d\} = 1 - q_n$$

dove ricordiamo che

$$q_n = \frac{1 + R_n - d_n}{u_n - d_n}, \qquad 1 - q_n = \frac{u_n - 1 - R_n}{u_n - d_n}$$

con $u_n = e^{\sigma\sqrt{\frac{1}{n}}}$, $d_n = e^{-\sigma\sqrt{\frac{1}{n}}}$ e $R_n = e^{\frac{r}{n}} - 1$.
Vogliamo dimostrare che $X^n_t = S^n_{[nt]}$ converge in legge verso S_t soluzione di

$$dS_t = rS_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t$$

Da CRR a BS: convergenza della media

Calcoliamo allora

$$
\begin{aligned}
b_n(x) &= n\mathbb{E}_x[(S_1^n - x)\mathbf{1}_{|S_1^n - x|\leq 1}] = \\
&= n((xu_n - x)q_n + (xd_n - x)(1-q_n)) = \\
&= nx((u_n - 1)q_n + (d_n - 1)(1-q_n)) = \\
&= nx(u_n q_n + d_n(1-q_n) - 1) = \\
&= nx(1 + R_n - 1) = nx\left(1 + \frac{r}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) = \\
&= xr + o(1) \longrightarrow rx
\end{aligned}
$$

dove abbiamo usato il fatto che $\tilde{S}^n$ è una martingala sotto $\mathbb{Q}$, e quindi $u_n q_n + d_n(1-q_n) = 1 + R_n$.

Da CRR a BS: convergenza della varianza

Inoltre,

$$
\begin{aligned}
a_n(x) &= \mathbb{E}_x[(S_1^n - x)^2 \mathbf{1}_{|S_1^n - x| \leq 1}] = \\
&= n(x^2(u_n - 1)^2 q_n + x^2(d_n - 1)^2(1 - q_n)) = \\
&= nx^2 \left(\left(1 + \sigma\sqrt{\frac{1}{n}} + o(n^{-1/2}) - 1 \right)^2 q_n + \right. \\
&\quad \left. + \left(1 - \sigma\sqrt{\frac{1}{n}} + o(n^{-1/2}) - 1 \right)^2 (1 - q_n) \right) = \\
&= nx^2 \left(\frac{\sigma^2}{n} q_n + \frac{\sigma^2}{n}(1 - q_n) + o(n^{-1}) \right) = \\
&= \sigma^2 x^2 + o(1) \longrightarrow \sigma^2 x^2
\end{aligned}
$$

uniformemente sui compatti.

Da CRR a BS: salti piccoli

Infine, per $|x| < M$,

$$\begin{aligned} p_n^{\varepsilon}(x) &= n\mathbb{Q}_x\{|Y_1^n - x| > \varepsilon\} = n\mathbb{Q}_x\left\{|\xi_1^n - 1| > \frac{\varepsilon}{x}\right\} < \\ &< n\mathbb{Q}_x\left\{|\xi_n - 1| > \frac{\varepsilon}{M}\right\} \end{aligned}$$

e per n abbastanza grande si ha che $|e^{\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} - 1| < \frac{\varepsilon}{M}$, e quindi la probabilitá sopra é definitivamente uguale a 0.

Si ha quindi che $(X^n)_n$ converge in legge alla soluzione dell'equazione differenziale stocastica

$$dS_t = RS_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t$$

Da CRR a BS: salti piccoli

Infine, per $|x| < M$,

$$\begin{aligned} p_n^{\varepsilon}(x) &= n\mathbb{Q}_x\{|Y_1^n - x| > \varepsilon\} = n\mathbb{Q}_x\left\{|\xi_1^n - 1| > \frac{\varepsilon}{x}\right\} < \\ &< n\mathbb{Q}_x\left\{|\xi_n - 1| > \frac{\varepsilon}{M}\right\} \end{aligned}$$

e per n abbastanza grande si ha che $|e^{\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} - 1| < \frac{\varepsilon}{M}$, e quindi la probabilitá sopra é definitivamente uguale a 0.
Si ha quindi che $(X^n)_n$ converge in legge alla soluzione dell'equazione differenziale stocastica

$$dS_t = RS_t\ dt + \sigma S_t\ dW_t$$

Simulazione Monte Carlo di processi stocastici

Supponiamo di dover calcolare $\mathbb{E}[f(X_T)]$ (o anche un funzionale più generale), dove X è un processo di diffusione in $\mathbb{R}^d$ avente dinamica generale

$$dX_t = b(X_t)\ dt + \sigma(X_t)\ dW_t \tag{2}$$

In casi particolari ($d = 1$, alcuni casi con $d > 1$) si può costruire uno schema ad albero, computazionalmente efficiente (es. Black-Scholes e CRR).

Se però $d > 4$, SE FATTIBILE, questo inizia comunque ad essere computazionalmente inefficiente.

Vediamo ora come simulare la legge di X (e calcolare $\mathbb{E}[f(X_T)]$) con il metodo Monte Carlo.

L'idea é di simulare X con Y^n, che per il teorema di convergenza in legge visto la scorsa settimana hanno leggi vicine a quella di X, e simulare Y^n tramite un metodo Monte Carlo.

Simulazione Monte Carlo di processi stocastici

Supponiamo di dover calcolare $\mathbb{E}[f(X_T)]$ (o anche un funzionale più generale), dove X è un processo di diffusione in $\mathbb{R}^d$ avente dinamica generale

$$dX_t = b(X_t)\ dt + \sigma(X_t)\ dW_t \tag{2}$$

In casi particolari ($d = 1$, alcuni casi con $d > 1$) si può costruire uno schema ad albero, computazionalmente efficiente (es. Black-Scholes e CRR).

Se però $d > 4$, SE FATTIBILE, questo inizia comunque ad essere computazionalmente inefficiente.

Vediamo ora come simulare la legge di X (e calcolare $\mathbb{E}[f(X_T)]$) con il metodo Monte Carlo.

L'idea é di simulare X con Y^n, che per il teorema di convergenza in legge visto la scorsa settimana hanno leggi vicine a quella di X, e simulare Y^n tramite un metodo Monte Carlo.

Simulazione Monte Carlo di processi stocastici

Supponiamo di dover calcolare $\mathbb{E}[f(X_T)]$ (o anche un funzionale più generale), dove X è un processo di diffusione in $\mathbb{R}^d$ avente dinamica generale

$$dX_t = b(X_t)\ dt + \sigma(X_t)\ dW_t \tag{2}$$

In casi particolari ($d = 1$, alcuni casi con $d > 1$) si può costruire uno schema ad albero, computazionalmente efficiente (es. Black-Scholes e CRR).
Se però $d > 4$, SE FATTIBILE, questo inizia comunque ad essere computazionalmente inefficiente.
Vediamo ora come simulare la legge di X (e calcolare $\mathbb{E}[f(X_T)]$) con il metodo Monte Carlo.
L'idea é di simulare X con Y^n, che per il teorema di convergenza in legge visto la scorsa settimana hanno leggi vicine a quella di X, e simulare Y^n tramite un metodo Monte Carlo.

Simulazione Monte Carlo di processi stocastici

Supponiamo di dover calcolare $\mathbb{E}[f(X_T)]$ (o anche un funzionale più generale), dove X è un processo di diffusione in $\mathbb{R}^d$ avente dinamica generale

$$dX_t = b(X_t)\ dt + \sigma(X_t)\ dW_t \tag{2}$$

In casi particolari ($d = 1$, alcuni casi con $d > 1$) si può costruire uno schema ad albero, computazionalmente efficiente (es. Black-Scholes e CRR).
Se però $d > 4$, SE FATTIBILE, questo inizia comunque ad essere computazionalmente inefficiente.
Vediamo ora come simulare la legge di X (e calcolare $\mathbb{E}[f(X_T)]$) con il metodo Monte Carlo.
L'idea é di simulare X con Y^n, che per il teorema di convergenza in legge visto la scorsa settimana hanno leggi vicine a quella di X, e simulare Y^n tramite un metodo Monte Carlo.

Simulazione Monte Carlo di processi stocastici

Supponiamo di dover calcolare $\mathbb{E}[f(X_T)]$ (o anche un funzionale più generale), dove X è un processo di diffusione in $\mathbb{R}^d$ avente dinamica generale

$$dX_t = b(X_t)\ dt + \sigma(X_t)\ dW_t \tag{2}$$

In casi particolari ($d = 1$, alcuni casi con $d > 1$) si può costruire uno schema ad albero, computazionalmente efficiente (es. Black-Scholes e CRR).
Se però $d > 4$, SE FATTIBILE, questo inizia comunque ad essere computazionalmente inefficiente.
Vediamo ora come simulare la legge di X (e calcolare $\mathbb{E}[f(X_T)]$) con il metodo Monte Carlo.
L'idea é di simulare X con Y^n, che per il teorema di convergenza in legge visto la scorsa settimana hanno leggi vicine a quella di X, e simulare Y^n tramite un metodo Monte Carlo.

Esempio: schema di Eulero

Se dobbiamo simulare un processo con dinamica

$$dX_t = b(X_t)\ dt + \sigma(X_t)\ dW_t$$

con $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times m}$, W moto browniano m-dimensionale, costruiamo la catena di Markov approssimante in questo modo:

$$Y^n_{k+1} := Y^n_k + b(Y^n_k)\Delta + \sigma(Y^n_k)w^n_{k+1}$$

con $(w^n_k)_k$ i.i.d. $\sim N(0, \Delta I_m)$, $\Delta := \frac{1}{n}$ e I_m matrice identità m-dimensionale.

Andiamo ora a verificare le condizioni del teorema (per semplicitá di calcoli consideriamo il caso $d = 1$).

Esempio: schema di Eulero

Se dobbiamo simulare un processo con dinamica

$$dX_t = b(X_t)\ dt + \sigma(X_t)\ dW_t$$

con $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times m}$, W moto browniano m-dimensionale, costruiamo la catena di Markov approssimante in questo modo:

$$Y^n_{k+1} := Y^n_k + b(Y^n_k)\Delta + \sigma(Y^n_k)w^n_{k+1}$$

con $(w^n_k)_k$ i.i.d. $\sim N(0, \Delta I_m)$, $\Delta := \frac{1}{n}$ e I_m matrice identità m-dimensionale.
Andiamo ora a verificare le condizioni del teorema (per semplicitá di calcoli consideriamo il caso $d = 1$).

Convergenza di media e varianza

Abbiamo

$$
\begin{aligned}
b_n(x) &= n\mathbb{E}[Y_1^n - Y_0^n \mid Y_0^n = x] = \\
&= n\mathbb{E}[Y_0^n + b(Y_0^n)\Delta + \sigma(Y_0^n)w_1 - Y_0^n \mid Y_0^n = x] = \\
&= n(b(x)\Delta + \sigma(x)\mathbb{E}[w_1]) = b(x),
\end{aligned}
$$

e banalmente $b_n \to b$ sui compatti. Inoltre,

$$
\begin{aligned}
a_n(x) &= n\mathbb{E}[(Y_1^n - Y_0^n)^2 \mid Y_0^n = x] = \\
&= n\mathbb{E}[b^2(Y_0^n)\Delta + \sigma^2(Y_0^n)w_1^2 + 2b(Y_0^n)\Delta\sigma(Y_0^n)w_1 \mid Y_0^n = x] = \\
&= n(b^2(x)\Delta^2 + \sigma^2(x)\mathbb{E}[w_1^2] + 2b(Y_0^n)\Delta\sigma(Y_0^n)\mathbb{E}[w_1]) = \\
&= \frac{1}{n}b^2(x) + n\sigma^2(x)\Delta + 2b(x)\sigma(x)\cdot 0 = \sigma^2(x) + \frac{b^2(x)}{n}
\end{aligned}
$$

e anche qui $\sigma_n \to \sigma$ sui compatti.

Convergenza di media e varianza

Abbiamo

$$\begin{aligned} b_n(x) &= n\mathbb{E}[Y_1^n - Y_0^n \mid Y_0^n = x] = \\ &= n\mathbb{E}[Y_0^n + b(Y_0^n)\Delta + \sigma(Y_0^n)w_1 - Y_0^n \mid Y_0^n = x] = \\ &= n(b(x)\Delta + \sigma(x)\mathbb{E}[w_1]) = b(x), \end{aligned}$$

e banalmente $b_n \to b$ sui compatti. Inoltre,

$$\begin{aligned} a_n(x) &= n\mathbb{E}[(Y_1^n - Y_0^n)^2 \mid Y_0^n = x] = \\ &= n\mathbb{E}[b^2(Y_0^n)\Delta + \sigma^2(Y_0^n)w_1^2 + 2b(Y_0^n)\Delta\sigma(Y_0^n)w_1 \mid Y_0^n = x] = \\ &= n(b^2(x)\Delta^2 + \sigma^2(x)\mathbb{E}[w_1^2] + 2b(Y_0^n)\Delta\sigma(Y_0^n)\mathbb{E}[w_1]) = \\ &= \frac{1}{n}b^2(x) + n\sigma^2(x)\Delta + 2b(x)\sigma(x)\cdot 0 = \sigma^2(x) + \frac{b^2(x)}{n} \end{aligned}$$

e anche qui $\sigma_n \to \sigma$ sui compatti.

Salti piccoli

Infine, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$
\begin{aligned}
n\mathbb{P}_x\{|Y_1^n - x| > \varepsilon\} &= n\mathbb{P}\{|b(x)\Delta + \sigma(x)w_1| > \varepsilon\} = \\
&= n\mathbb{P}\{(b(x)\Delta + \sigma(x)w_1)^4 > \varepsilon^4\} \leq \\
&\leq \frac{n}{\varepsilon^4}\mathbb{E}[(b(x)\Delta + \sigma(x)w_1)^4] \leq \\
&\leq \frac{4n}{\varepsilon^4}(\mathbb{E}[(b(x)\Delta)^4] + \mathbb{E}[(\sigma(x)w_1)^4]) = \\
&= \frac{4n}{\varepsilon^4}(b^4(x)\Delta^4 + 3\sigma^4(x)\Delta^2) = \\
&= \frac{4b^4(x)\Delta^3 + 12\sigma^4(x)\Delta}{\varepsilon^4} \to 0
\end{aligned}
$$

e quindi si ha convergenza in legge.

Esempio: opzione asiatica

Supponiamo di voler valutare una opzione asiatica sulla media aritmetica, cioè con payoff del tipo $g(S_T, A_T)$, con $A_t := \int_0^t S_u \, du$.

Esempi:

- **average price Asian put** (put sul prezzo medio):

$$g(S_T, A_T) := \left(K - \frac{A_T}{T}\right)^+$$

- **average strike Asian call** (call sullo strike medio):

$$g(S_T, A_T) := \left(S_T - \frac{A_T}{T}\right)^+$$

Allora il problema può essere ricondotto a calcolare una funzione del processo di Markov bidimensionale

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(r \, dt + \sigma \, dW_t), \\ dA_t &= S_t \, dt \end{aligned}$$

Esempio: opzione asiatica

Supponiamo di voler valutare una opzione asiatica sulla media aritmetica, cioè con payoff del tipo $g(S_T, A_T)$, con $A_t := \int_0^t S_u \, du$.
Esempi:

- **average price Asian put** (put sul prezzo medio):

$$g(S_T, A_T) := \left(K - \frac{A_T}{T}\right)^+$$

- **average strike Asian call** (call sullo strike medio):

$$g(S_T, A_T) := \left(S_T - \frac{A_T}{T}\right)^+$$

Allora il problema può essere ricondotto a calcolare una funzione del processo di Markov bidimensionale

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(r\, dt + \sigma\, dW_t), \\ dA_t &= S_t\, dt \end{aligned}$$

Esempio: opzione asiatica

Supponiamo di voler valutare una opzione asiatica sulla media aritmetica, cioè con payoff del tipo $g(S_T, A_T)$, con $A_t := \int_0^t S_u \, du$. Esempi:

- **average price Asian put** (put sul prezzo medio):

$$g(S_T, A_T) := \left(K - \frac{A_T}{T}\right)^+$$

- **average strike Asian call** (call sullo strike medio):

$$g(S_T, A_T) := \left(S_T - \frac{A_T}{T}\right)^+$$

Allora il problema può essere ricondotto a calcolare una funzione del processo di Markov bidimensionale

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(r \, dt + \sigma \, dW_t), \\ dA_t &= S_t \, dt \end{aligned}$$

Esempio: opzione asiatica

Supponiamo di voler valutare una opzione asiatica sulla media aritmetica, cioè con payoff del tipo $g(S_T, A_T)$, con $A_t := \int_0^t S_u \, du$. Esempi:

- **average price Asian put** (put sul prezzo medio):

$$g(S_T, A_T) := \left(K - \frac{A_T}{T}\right)^+$$

- **average strike Asian call** (call sullo strike medio):

$$g(S_T, A_T) := \left(S_T - \frac{A_T}{T}\right)^+$$

Allora il problema può essere ricondotto a calcolare una funzione del processo di Markov bidimensionale

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(r \, dt + \sigma \, dW_t), \\ dA_t &= S_t \, dt \end{aligned}$$

Esempio: opzione asiatica

Bisogna simulare il processo di Markov bidimensionale

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(r\ dt + \sigma\ dW_t), \\ dA_t &= S_t\ dt \end{aligned}$$

che può essere simulato tramite lo schema di Eulero bidimensionale

$$\begin{aligned} S^N_{n+1} &= S^N_n + rS^N_n\Delta + \sigma S^N_n w_{n+1} = S^N_n(1 + r\Delta + \sigma w_{n+1}), \\ A^N_{n+1} &= A^N_n + S^N_n\Delta \end{aligned}$$

con $(w_n)_n$ i.i.d. di legge $N(0, \frac{1}{n})$ e $\Delta = \frac{1}{n}$.

Esempio: opzione asiatica

Bisogna simulare il processo di Markov bidimensionale

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(r\ dt + \sigma\ dW_t), \\ dA_t &= S_t\ dt \end{aligned}$$

che può essere simulato tramite lo schema di Eulero bidimensionale

$$\begin{aligned} S_{n+1}^N &= S_n^N + rS_n^N\Delta + \sigma S_n^N w_{n+1} = S_n^N(1 + r\Delta + \sigma w_{n+1}), \\ A_{n+1}^N &= A_n^N + S_n^N\Delta \end{aligned}$$

con $(w_n)_n$ i.i.d. di legge $N(0, \frac{1}{n})$ e $\Delta = \frac{1}{n}$.

Note

1. Per simulare un vettore aleatorio gaussiano (X_1, X_2), un tipico trucco é usare il fatto che, se U_1, U_2 sono delle variabili aleatorie uniformi su $(0,1)$ indipendenti, allora (X_1, X_2), definito da

$$X_1 := \sqrt{-2\log U_1}\sin 2\pi U_2, \qquad X_2 := \sqrt{-2\log U_1}\cos 2\pi U_2$$

ha legge $N(0, I_2)$.

2. Per controllare se il codice non dia dei valori palesemente errati, si tenga presente che

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(A_T - 0)^+] &= \mathbb{E}\left[\int_0^T S_t \, dt\right] = \int_0^T \mathbb{E}[S_t] \, dt = \\ &= \int_0^T s_0 e^{rt} \, dt = s_0 \frac{e^{rT} - 1}{r}\end{aligned}$$

Note

1. Per simulare un vettore aleatorio gaussiano (X_1, X_2), un tipico trucco é usare il fatto che, se U_1, U_2 sono delle variabili aleatorie uniformi su $(0,1)$ indipendenti, allora (X_1, X_2), definito da

$$X_1 := \sqrt{-2\log U_1}\sin 2\pi U_2, \qquad X_2 := \sqrt{-2\log U_1}\cos 2\pi U_2$$

ha legge $N(0, I_2)$.

2. Per controllare se il codice non dia dei valori palesemente errati, si tenga presente che

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(A_T - 0)^+] &= \mathbb{E}\left[\int_0^T S_t \; dt\right] = \int_0^T \mathbb{E}[S_t] \; dt = \\ &= \int_0^T s_0 e^{rt} \; dt = s_0 \frac{e^{rT} - 1}{r}\end{aligned}$$