Metodi Stocastici per la Finanza

Tiziano Vargiolu
vargiolu@math.unipd.it[1]

[1]Università degli Studi di Padova

Anno Accademico 2011-2012
Lezione 6

Indice

Diverse curve di tassi di interesse

Innanzitutto premettiamo che ci sono diverse curve di tassi sul mercato:

- governativi (Treasury), ricavati da obbligazioni di Stati nazionali (es. Stati Uniti, Italia, Grecia, ecc.);
- xIBOR: per una data moneta, ricavati da prestiti interbancari, di solito sotto forma di swap (es. LIBOR, EurIBOR, ecc.)
- obbligazioni di aziende.

Quali di questi sono tassi veramente senza rischio?
Di solito si ritiene che le obbligazioni di uno Stato che emette obbligazioni in una moneta che sia solo sua (es. Stati Uniti) siano senza rischio, perchè al peggio lo Stato, per onorare il debito alla scadenza, potrebbe stampare del denaro ed onorare il debito in questo modo (in realtà in questo modo provocherebbe inflazione, e il denaro appena emesso perderebbe valore). Le altre obbligazioni in genere sono ritenute più rischiose, e quindi i loro tassi sono maggiori per compensare il maggior rischio di credito o di liquidità.

Diversi tipi di tassi

Ricordiamo che, detto $P(t, T)$ il prezzo al tempo t di uno zero-coupon bond (treasury, xIBOR, corporate) con maturità T, si definiscono i **tassi**:

- **yield** o **zero-coupon**: $R(t, T)$ tale che $P(t, T) = e^{-(T-t)R(t,T)}$, quindi $R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \log P(t, T)$
- **forward**: $f(t, T)$ tale che $P(t, T) = e^{-\int_t^T f(t,u)du}$, quindi $f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \log P(t, T)$
- **spot**: $r(t) := \lim_{T\to t} f(t, T)$
- **lineare**: $L(t, T)$ tale che $P(t, T)(1 + (T - t)L(t, T)) = 1$, quindi $L(t, T) = \frac{1}{T-t} \left(\frac{1}{P(t,T)} - 1 \right)$

Per ricavare il primo e l'ultimo tasso con maturità T serve solo il prezzo dello zero-coupon bond con maturità T, mentre per ricavare gli altri due bisogna compiere un'operazione di limite e quindi disporre di infinite maturità T.

Cosa troviamo sul mercato (Treasury)?

Gli zero-coupon bonds sono in teoria i mattoni costitutivi di moltissimi titoli derivati da tassi di interesse, ma non sempre si riescono a trovare sul mercato in questa forma: spesso bisogna ricavarli da prezzi di obbligazioni, presenti con un numero finito di maturità $T_1 < \ldots < T_N$.

Generalmente questi titoli seguono queste convenzioni:

- ad ogni data cedolare T_k, se l'obbligazione ha una cedola fissa ρ allora paga la quantità $\rho(T_k - T_{k-1})P$, dove P è il valore nominale dell'obbligazione;
- all'ultima data T_n viene pagata l'ultima cedola $\rho(T_n - T_{n-1})P$ insieme al valore nominale P;
- generalmente i prezzi si quotano con la convenzione $P = 100$.

Il prezzo di tali obbligazioni in $t = T_0$ è allora dato da

$$O_t = \sum_{i=1}^{n} \rho_n(T_i - T_{i-1})P \cdot P(t, T_i) + P \cdot P(t, T_n)$$

Il metodo bootstrap

Il metodo bootstrap permette di ricavare i prezzi degli zero-coupon bond dai prezzi di altri titoli, che sono tipicamente funzioni lineari di zero-coupon bond, quali obbligazioni o swap. Nel seguito, analizziamo in dettaglio il bootstrap eseguito da prezzi di obbligazioni, che sono i dati che più comunemente si riescono a trovare gratis su Internet.

Supponiamo di avere al tempo t i prezzi di N obbligazioni $O_1, \ldots, O_N$ a tasso fisso, ciascuna con maturità $T_1 < \ldots < T_N$, e di voler ricavare i prezzi dei corrispondenti zero-coupon bond $P(t, T_1), \ldots, P(t, T_N)$.

Per ogni $n = 1, \ldots, N$ ci sono allora tre casi possibili:

1. L'obbligazione O_n è senza cedole (es. BOT);
2. L'obbligazione O_n ha una sola cedola residua alla maturità T_n, che verrà pagata insieme al valore nominale (es. BTP con vita residua minore di 6 mesi);
3. L'obbligazione O_n ha cedole non nulle di tasso ρ_n prima della scadenza (es. BTP con vita residua maggiore di 6 mesi);

Dalle obbligazioni agli ZCB: primi due casi

1. Se O_n è senza cedole, è essa stessa uno zero-coupon bond. Allora

$$P \cdot P(t, T_n) = O_n$$

quindi

$$P(t, T_n) = \frac{O_n}{P}$$

2. Se O_n ha una cedola non nulla di tasso ρ_n, pagata alla maturità T_n, allora

$$O_n = \rho_n(T_n - t)P \cdot P(t, T_n) + P \cdot P(t, T_n)$$

e quindi

$$P(t, T_n) = \frac{O_n/P}{1 + \rho_n(T_n - t)}$$

Dalle obbligazioni agli ZCB: terzo caso

3 Se O_n ha cedole non nulle di tasso ρ_n prima della scadenza, allora per riuscire a calcolare $P(t, T_n)$ è sufficiente sapere (tipicamente dai prezzi $O_1, \ldots, O_{n-1}$) i prezzi $P(t, T_1), \ldots, P(t, T_{n-1})$ e che le date $T_1, \ldots, T_{n-1}$ siano esattamente le date di stacco di cedole di questa obbligazione. Difatti, siccome il prezzo di O_n è dato da

$$O_n = \sum_{i=1}^{n} \rho_n (T_i - T_{i-1}) P \cdot P(t, T_i) + P \cdot P(t, T_n)$$

dove poniamo $T_0 := t$, per ricavare $P(t, T_n)$ basta invertire la relazione, e si ottiene

$$P(t, T_n) = \frac{O_n/P - \sum_{i=1}^{n-1} \rho_n (T_i - T_{i-1}) P(t, T_i)}{1 + \rho_n (T_n - T_{n-1})}$$

Più algebra lineare

Si può vedere questa procedura in modo più astratto in questo modo. Supponiamo di avere i prezzi di N obbligazioni $O_1, \ldots, O_N$ con maturità rispettivamente $T_1 < \ldots < T_N$ tali che le cedole vengano pagate esattamente in queste maturità con tasso fisso rispettivamente $\rho_1, \ldots, \rho_n$: chiaramente se uno di questi tassi è nullo l'obbligazione corrispondente sarà uno zero-coupon bond. Allora i prezzi $(O_1, \ldots, O_n)$ soddisfano il sistema

$$\begin{pmatrix} O_1/P \\ \vdots \\ O_N/P \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} P(t, T_1) \\ \vdots \\ P(t, T_N) \end{pmatrix}$$

dove (I_N = matrice identità su $\mathbb{R}^N$):

$$A := I_N + \begin{pmatrix} \rho_1(T_1 - t) & 0 & \ldots & 0 \\ \rho_2(T_1 - t) & \rho_2(T_2 - T_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \rho_N(T_1 - t) & \ldots & \ldots & \rho_N(T_N - T_{N-1}) \end{pmatrix}$$

Invertire il sistema

Dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{pmatrix} O_1/P \\ \vdots \\ O_N/P \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} P(t, T_1) \\ \vdots \\ P(t, T_N) \end{pmatrix} \tag{1}$$

La matrice A è triangolare inferiore ed invertibile per ogni valore di $\rho_i > 0$ e per ogni $t < T_1 < \ldots < T_N$.
Per trovare i $(P(t, T_1), \ldots, P(t, T_N))$ basta quindi risolvere il sistema (1).

Implementazione Excel

Costruire una tabella come segue:

- nella casella A1 mettere la data di oggi in formato gg/mm/aaaa;
- nella riga 2 mettere la legenda come segue:

	A	B	C	D	E	F
1	(data di oggi)					
2	maturità	tempo a maturità	prezzo obbligazione	cedola	prezzo ZC	tasso zero-coupon

- nelle righe seguenti, per ogni riga riempire le colonne A, C e D con i dati delle obbligazioni (`finance.yahoo.com -> Investing -> Bonds -> Bond Screener -> Find Bonds (Treasury ZC, Callable: No)`);
- nella colonna B mettere la differenza tra la maturità dell'obbligazione e la data odierna;
- nella colonna E implementare la formula del bootstrap adatta alle cedole dell'obbligazione (senza, con unica o con più);
- nella colonna F calcolare i corrispondenti tassi zero-coupon.