Metodi Stocastici per la Finanza

Tiziano Vargiolu
vargiolu@math.unipd.it[1]

[1]Università degli Studi di Padova

Anno Accademico 2012-2013
Lezione 9

Indice

Indice

Indice

Prezzaggio di opzioni su obbligazioni con modelli ad un fattore

In questa lezione vedremo come prezzare opzioni su obbligazioni che rilasciano:

- cedole $C_i \geq 0$ (anche diverse tra loro), $i = 1, \dots, n$ agli istanti $T_1 < \dots < T_n$;
- valore nominale $N \geq 0$ all'istante T_n.

Il prezzo al tempo t di una tale obbligazione è dato da

$$O_t = \sum_{i=1}^{n} C_i P(t, T_i) + NP(t, T_n)$$

Supponiamo ora di voler prezzare una opzione call su O_t di maturità $T < T_1$ e strike K; chiaramente il suo payoff finale sarà $(O_T - K)^+$.

Prezzaggio di opzioni su obbligazioni con modelli ad un fattore

In questa lezione vedremo come prezzare opzioni su obbligazioni che rilasciano:

- cedole $C_i \geq 0$ (anche diverse tra loro), $i = 1, \ldots, n$ agli istanti $T_1 < \ldots < T_n$;
- valore nominale $N \geq 0$ all'istante T_n.

Il prezzo al tempo t di una tale obbligazione è dato da

$$O_t = \sum_{i=1}^{n} C_i P(t, T_i) + NP(t, T_n)$$

Supponiamo ora di voler prezzare una opzione call su O_t di maturità $T < T_1$ e strike K; chiaramente il suo payoff finale sarà $(O_T - K)^+$.

Prezzaggio di opzioni su obbligazioni con modelli ad un fattore

In questa lezione vedremo come prezzare opzioni su obbligazioni che rilasciano:

- cedole $C_i \geq 0$ (anche diverse tra loro), $i = 1, \ldots, n$ agli istanti $T_1 < \ldots < T_n$;
- valore nominale $N \geq 0$ all'istante T_n.

Il prezzo al tempo t di una tale obbligazione è dato da

$$O_t = \sum_{i=1}^{n} C_i P(t, T_i) + NP(t, T_n)$$

Supponiamo ora di voler prezzare una opzione call su O_t di maturità $T < T_1$ e strike K; chiaramente il suo payoff finale sarà $(O_T - K)^+$.

Comonotonia

La tecnica che presentiamo in questa sezione funziona ogniqualvolta i prezzi degli zero-coupon bonds $P(t, T)$, $T > t$, dipendono in modo **comonotono** da una generica variabile di stato X, cioè sono della forma $P(t, T; X)$, dove la famiglia di funzioni $P(t, T; \cdot)$, $t < T$, è formata da funzioni *tutte* monotone allo stesso modo, cioè tutte crescenti o tutte decrescenti.
Un caso significativo in cui questo accade è quello dei modelli affini: difatti, se per ogni t, T, si ha

$$P(t, T; r_t) = \exp(A(t, T) - B(t, T) r_t)$$

con $B(t, T) > 0$ per ogni $t < T$, allora i $P(t, T; \cdot)$, $t < T$, sono comonotoni (decrescenti) rispetto a r_t.

Comonotonia

La tecnica che presentiamo in questa sezione funziona ogniqualvolta i prezzi degli zero-coupon bonds $P(t, T)$, $T > t$, dipendono in modo **comonotono** da una generica variabile di stato X, cioè sono della forma $P(t, T; X)$, dove la famiglia di funzioni $P(t, T; \cdot)$, $t < T$, è formata da funzioni *tutte* monotone allo stesso modo, cioè tutte crescenti o tutte decrescenti.

Un caso significativo in cui questo accade è quello dei modelli affini: difatti, se per ogni t, T, si ha

$$P(t, T; r_t) = \exp(A(t, T) - B(t, T) r_t)$$

con $B(t, T) > 0$ per ogni $t < T$, allora i $P(t, T; \cdot)$, $t < T$, sono comonotoni (decrescenti) rispetto a r_t.

Comonotonia

La tecnica che presentiamo in questa sezione funziona ogniqualvolta i prezzi degli zero-coupon bonds $P(t, T)$, $T > t$, dipendono in modo **comonotono** da una generica variabile di stato X, cioè sono della forma $P(t, T; X)$, dove la famiglia di funzioni $P(t, T; \cdot)$, $t < T$, è formata da funzioni *tutte* monotone allo stesso modo, cioè tutte crescenti o tutte decrescenti.
Un caso significativo in cui questo accade è quello dei modelli affini: difatti, se per ogni t, T, si ha

$$P(t, T; r_t) = \exp(A(t, T) - B(t, T) r_t)$$

con $B(t, T) > 0$ per ogni $t < T$, allora i $P(t, T; \cdot)$, $t < T$, sono comonotoni (decrescenti) rispetto a r_t.

Comonotonia e prezzi di obbligazioni

Siccome sia le cedole C_i che il nominale N sono nonnegativi, se i prezzi degli zero-coupon bonds $P(t, T)$, $T > t$, dipendono in modo comonotono (decrescente) da r_t, allora O_t è una funzione monotona (decrescente) di r_t.

Quindi (almeno per valori ragionevoli di K) esiste un unico r^* tale che se $r_T \leq r^*$ se e solo se $O_T \geq K$, e in particolare

$$\sum_{i=1}^{n} C_i P(T, T_i; r^*) + NP(T, T_n; r^*) = K$$

Sfruttando questa relazione si può decomporre il prezzo della call sull'obbligazione come combinazione lineare di opzioni su zero-coupon bonds con opportuni strike $K_i := P(T, T_i; r^*)$.

Comonotonia e prezzi di obbligazioni

Siccome sia le cedole C_i che il nominale N sono nonnegativi, se i prezzi degli zero-coupon bonds $P(t, T)$, $T > t$, dipendono in modo comonotono (decrescente) da r_t, allora O_t è una funzione monotona (decrescente) di r_t.
Quindi (almeno per valori ragionevoli di K) esiste un unico r^* tale che se $r_T \leq r^*$ se e solo se $O_T \geq K$, e in particolare

$$\sum_{i=1}^{n} C_i P(T, T_i; r^*) + NP(T, T_n; r^*) = K$$

Sfruttando questa relazione si può decomporre il prezzo della call sull'obbligazione come combinazione lineare di opzioni su zero-coupon bonds con opportuni strike $K_i := P(T, T_i; r^*)$.

Comonotonia e prezzi di obbligazioni

Siccome sia le cedole C_i che il nominale N sono nonnegativi, se i prezzi degli zero-coupon bonds $P(t, T)$, $T > t$, dipendono in modo comonotono (decrescente) da r_t, allora O_t è una funzione monotona (decrescente) di r_t.
Quindi (almeno per valori ragionevoli di K) esiste un unico r^* tale che se $r_T \leq r^*$ se e solo se $O_T \geq K$, e in particolare

$$\sum_{i=1}^{n} C_i P(T, T_i; r^*) + NP(T, T_n; r^*) = K$$

Sfruttando questa relazione si può decomporre il prezzo della call sull'obbligazione come combinazione lineare di opzioni su zero-coupon bonds con opportuni strike $K_i := P(T, T_i; r^*)$.

Comonotonia e prezzi di obbligazioni

Siccome sia le cedole C_i che il nominale N sono nonnegativi, se i prezzi degli zero-coupon bonds $P(t,T)$, $T > t$, dipendono in modo comonotono (decrescente) da r_t, allora O_t è una funzione monotona (decrescente) di r_t.
Quindi (almeno per valori ragionevoli di K) esiste un unico r^* tale che se $r_T \leq r^*$ se e solo se $O_T \geq K$, e in particolare

$$\sum_{i=1}^{n} C_i P(T, T_i; r^*) + NP(T, T_n; r^*) = K$$

Sfruttando questa relazione si può decomporre il prezzo della call sull'obbligazione come combinazione lineare di opzioni su zero-coupon bonds con opportuni strike $K_i := P(T, T_i; r^*)$.

Decomposizione di Jamshidian

Il prezzo della call (per semplicità $t = 0$) si può scrivere come

$$\begin{aligned}
C_0 &= \mathbb{E}[e^{-\int_0^T r_u\, du}(O_T - K)^+] = \mathbb{E}[e^{-\int_0^T r_u\, du}(O_T - K)\mathbf{1}_{\{O_T \geq K\}}] = \\
&= \mathbb{E}\left[e^{-\int_0^T r_u\, du}\left(\sum_{i=1}^n C_i P(T, T_i; r_T) + NP(T, T_n; r_T) - \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. - \sum_{i=1}^n C_i P(T, T_i; r^*) - NP(T, T_n; r^*)\right)\mathbf{1}_{\{r_T \leq r^*\}}\right] = \\
&= \sum_{i=1}^n C_i \mathbb{E}[e^{-\int_0^T r_u\, du}(P(T, T_i; r_T) - P(T, T_i; r^*))\mathbf{1}_{\{r_T \leq r^*\}}] + \\
&\quad + N\mathbb{E}[e^{-\int_0^T r_u\, du}(P(T, T_n; r_T) - P(T, T_n; r^*))\mathbf{1}_{\{r_T \leq r^*\}}] = \\
&= \sum_{i=1}^n C_i \mathbb{E}[e^{-\int_0^T r_u\, du}(P(T, T_i; r_T) - K_i)^+] + \\
&\quad + N\mathbb{E}[e^{-\int_0^T r_u\, du}(P(T, T_n; r_T) - K_n)^+]
\end{aligned}$$

Decomposizione di Jamshidian: risultato finale

Il prezzo della call è infine

$$C_0 = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbb{E}[e^{-\int_0^T r_u \, du}(P(T, T_i; r_T) - K_i)^+] + \\ + N\mathbb{E}[e^{-\int_0^T r_u \, du}(P(T, T_n; r_T) - K_n)^+]$$

ed è quindi uguale ad una combinazione lineare di opzioni call su zero-coupon bonds con opportuni strike $K_i := P(T, T_i; r^*)$, $i = 1, \ldots, n$.

Nei modelli affini, call e put di ZCB hanno un prezzo in formula chiusa.

Decomposizione di Jamshidian: risultato finale

Il prezzo della call è infine

$$\begin{aligned} C_0 &= \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbb{E}[e^{-\int_0^T r_u \, du}(P(T, T_i; r_T) - K_i)^+] + \\ & +N\mathbb{E}[e^{-\int_0^T r_u \, du}(P(T, T_n; r_T) - K_n)^+] \end{aligned}$$

ed è quindi uguale ad una combinazione lineare di opzioni call su zero-coupon bonds con opportuni strike $K_i := P(T, T_i; r^*)$, $i = 1, \dots, n$.

Nei modelli affini, call e put di ZCB hanno un prezzo in formula chiusa.

Formula di Black per modelli gaussiani

In particolare, nel modello di Hull-White (e quindi anche nel modello di Vasicek) per un'opzione su uno zero-coupon bond si ha la cosiddetta "formula di Black"

$$\mathbb{E}[e^{-\int_0^T r_u \, du}(P(T, T_i) - K_i)^+] = P(0, T_i)N(h_i) - K_i P(0, T)N(h_i - \sigma_i)$$

con

$$h_i := \frac{1}{\sigma_i} \log \frac{P(0, T_i)}{K_i P(0, T)} + \frac{1}{2}\sigma_i, \quad \sigma_i := \frac{\sigma}{a}(1 - e^{-a(T_i - T)})\sqrt{\frac{1 - e^{-2aT}}{2a}}$$

Caps e floors

Siamo ora interessati a derivati su un flusso di tassi di interesse relativi allo scadenzario $T_0 < T_1 < \ldots < T_n$. Definiamo anche $\alpha_i := T_i - T_{i-1}$. Spesso $\alpha_i \equiv \alpha$, che si chiama allora **frequenza (tenor)** (spesso 1m, 3m, 6m o 1a).
Un **cap** di livello R sul tasso

$$L_i(t) = L(t, T_{i-1}, T_i) = \frac{1}{\alpha_i}\left(\frac{P(t, T_{i-1})}{P(t, T_i)} - 1\right)$$

con $i = 1, \ldots, n$, è un contratto che permette di pagare un tasso fisso (annuale) R al posto di L_i ad ogni data T_i, $i = 1, \ldots, n$.
Un **floor** permette invece di fare lo scambio contrario.
Ogni singolo scambio alla data T_i, $i = 1, \ldots, n$, si chiama **caplet** (**floorlet**).

Prezzaggio di caps con modelli ad un fattore

Per prezzare un cap, basta ovviamente prezzare ogni singolo caplet: l'i-esimo caplet ha payoff al tempo T_i dato da

$$X_i = \alpha_i (L_i(T_{i-1}) - R)^+$$

Il suo prezzo al tempo t sarà allora

$$\mathrm{Capl}_i(t) = \mathbb{E}_t[e^{-\int_0^{T_i} r_u \, du} \alpha_i (L_i(T_{i-1}) - R)^+]$$

Prezzaggio. Siccome $L_i(T_{i-1})$ è conosciuto al tempo T_{i-1}, avere payoff $\alpha_i(L_i(T_{i-1}) - R)^+$ al tempo T_i è equivalente ad avere il payoff $\alpha_i P(T_{i-1}, T_i)(L_i(T_{i-1}) - R)^+$ al tempo T_{i-1}. Difatti, avendolo in T_{i-1} si può investire nello zero coupon bond che matura in T_i, ricavandone $\alpha_i(L_i(T_{i-1}) - R)^+$ in T_i.

Prezzaggio di caps con modelli ad un fattore

Per prezzare un cap, basta ovviamente prezzare ogni singolo caplet: l'i-esimo caplet ha payoff al tempo T_i dato da

$$X_i = \alpha_i (L_i(T_{i-1}) - R)^+$$

Il suo prezzo al tempo t sarà allora

$$\mathrm{Capl}_i(t) = \mathbb{E}_t[e^{-\int_0^{T_i} r_u \, du} \alpha_i (L_i(T_{i-1}) - R)^+]$$

Prezzaggio. Siccome $L_i(T_{i-1})$ è conosciuto al tempo T_{i-1}, avere payoff $\alpha_i(L_i(T_{i-1}) - R)^+$ al tempo T_i è equivalente ad avere il payoff $\alpha_i P(T_{i-1}, T_i)(L_i(T_{i-1}) - R)^+$ al tempo T_{i-1}.
Difatti, avendolo in T_{i-1} si può investire nello zero coupon bond che matura in T_i, ricavandone $\alpha_i(L_i(T_{i-1}) - R)^+$ in T_i.

Caplet come put su uno ZCB

Ma

$$\begin{aligned}
&\alpha_i P(T_{i-1}, T_i)(L_i(T_{i-1}) - R)^+ = \\
&= \alpha_i P(T_{i-1}, T_i) \left(\frac{1}{\alpha_i} \left(\frac{P(T_{i-1}, T_{i-1})}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1 \right) - R \right)^+ = \\
&= (1 - (1 + \alpha_i R) P(T_{i-1}, T_i))^+ = \\
&= (1 + \alpha_i R) \left(\frac{1}{1 + \alpha_i R} - P(T_{i-1}, T_i) \right)^+
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\mathrm{Capl}_i(t) = (1+R\alpha_i)\mathbb{E}_t \left[e^{-\int_0^{T_{i-1}} r_u \, du} \left(\frac{1}{1 + R\alpha_i} - P(T_{i-1}, T_i) \right)^+ \right]$$

ed è quindi il prezzo di una put di maturità $T = T_{i-1}$, strike $K_i = \frac{1}{1+R\alpha_i}$ e sottostante $P(\cdot, T_i)$ ...

$\rightsquigarrow$ formula di Black.

Caplet come put su uno ZCB

Ma

$$
\begin{aligned}
&\alpha_i P(T_{i-1}, T_i)(L_i(T_{i-1}) - R)^+ = \\
&= \quad \alpha_i P(T_{i-1}, T_i) \left(\frac{1}{\alpha_i} \left(\frac{P(T_{i-1}, T_{i-1})}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1 \right) - R \right)^+ = \\
&= \quad (1 - (1 + \alpha_i R) P(T_{i-1}, T_i))^+ = \\
&= \quad (1 + \alpha_i R) \left(\frac{1}{1 + \alpha_i R} - P(T_{i-1}, T_i) \right)^+
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$
\mathrm{Capl}_i(t) = (1 + R\alpha_i)\mathbb{E}_t \left[e^{-\int_0^{T_{i-1}} r_u \ du} \left(\frac{1}{1 + R\alpha_i} - P(T_{i-1}, T_i) \right)^+ \right]
$$

ed è quindi il prezzo di una put di maturità $T = T_{i-1}$, strike $K_i = \frac{1}{1+R\alpha_i}$ e sottostante $P(\cdot, T_i) \dots$
$\rightsquigarrow$ formula di Black.

Prezzaggio di swaptions con modelli ad un fattore

Una swaption per entrare al tempo $T = T_0$ in un payer IRS ad un tasso fisso K ha un payoff

$$X_0^N = PS_0^N(T;K)^+ = S_0^N(T)(R_0^N(T) - K)^+$$

dove $R_0^N(T)$ è il tasso swap

$$R_0^N(t) = \frac{P(t,T_0) - P(t,T_N)}{S_0^N(t)}$$

e $S_0^N(t)$ è il fattore

$$S_0^N(t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i P(t,T_i)$$

quindi si ha anche

$$X_0^N = (1 - P(t,T_N) - KS_0^N(T))^+$$

Prezzaggio di swaptions con modelli ad un fattore

Una swaption per entrare al tempo $T = T_0$ in un payer IRS ad un tasso fisso K ha un payoff

$$X_0^N = PS_0^N(T; K)^+ = S_0^N(T)(R_0^N(T) - K)^+$$

dove $R_0^N(T)$ è il tasso swap

$$R_0^N(t) = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_N)}{S_0^N(t)}$$

e $S_0^N(t)$ è il fattore

$$S_0^N(t) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i P(t, T_i)$$

quindi si ha anche

$$X_0^N = (1 - P(t, T_N) - KS_0^N(T))^+$$

Swaption come put su un'obbligazione

Il prezzo di una swaption al tempo t è quindi

$$X_0^N = \mathbb{E}_t[e^{-\int_0^T r_u \, du}(1 - P(T, T_N) - KS_0^N(T))^+]$$

e si può quindi scrivere come put su un'obbligazione:

$$X_0^N = \mathbb{E}_t[e^{-\int_0^T r_u \, du}(1 - O(T))^+]$$

dove il prezzo al tempo t dell'obbligazione $O(t)$ è dato da

$$O(t) := KS_0^N(t) + P(t, T_N) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i KP(t, T_i) + P(t, T_N)$$

ed ha quindi cedola in T_i pari a $K\alpha_i$ e principale 1.
La swaption si può quindi prezzare con la formula di Jamshidian.

Swaption come put su un'obbligazione

Il prezzo di una swaption al tempo t è quindi

$$X_0^N = \mathbb{E}_t[e^{-\int_0^T r_u \ du}(1 - P(T, T_N) - KS_0^N(T))^+]$$

e si può quindi scrivere come put su un'obbligazione:

$$X_0^N = \mathbb{E}_t[e^{-\int_0^T r_u \ du}(1 - O(T))^+]$$

dove il prezzo al tempo t dell'obbligazione $O(t)$ è dato da

$$O(t) := KS_0^N(t) + P(t, T_N) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i KP(t, T_i) + P(t, T_N)$$

ed ha quindi cedola in T_i pari a $K\alpha_i$ e principale 1.
La swaption si può quindi prezzare con la formula di Jamshidian.

Swaption come put su un'obbligazione

Il prezzo di una swaption al tempo t è quindi

$$X_0^N = \mathbb{E}_t[e^{-\int_0^T r_u \, du}(1 - P(T, T_N) - KS_0^N(T))^+]$$

e si può quindi scrivere come put su un'obbligazione:

$$X_0^N = \mathbb{E}_t[e^{-\int_0^T r_u \, du}(1 - O(T))^+]$$

dove il prezzo al tempo t dell'obbligazione $O(t)$ è dato da

$$O(t) := KS_0^N(t) + P(t, T_N) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i KP(t, T_i) + P(t, T_N)$$

ed ha quindi cedola in T_i pari a $K\alpha_i$ e principale 1.

La swaption si può quindi prezzare con la formula di Jamshidian.

Swaption come put su un'obbligazione

Il prezzo di una swaption al tempo t è quindi

$$X_0^N = \mathbb{E}_t[e^{-\int_0^T r_u \, du}(1 - P(T, T_N) - KS_0^N(T))^+]$$

e si può quindi scrivere come put su un'obbligazione:

$$X_0^N = \mathbb{E}_t[e^{-\int_0^T r_u \, du}(1 - O(T))^+]$$

dove il prezzo al tempo t dell'obbligazione $O(t)$ è dato da

$$O(t) := KS_0^N(t) + P(t, T_N) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i KP(t, T_i) + P(t, T_N)$$

ed ha quindi cedola in T_i pari a $K\alpha_i$ e principale 1.
La swaption si può quindi prezzare con la formula di Jamshidian.

Implementazione con il modello di Vasicek

Presentiamo ora un'implementazione che usa i programmi già visti con il modello di Vasicek. Il primo programma, chiamato Obbl, fornisce il prezzo al tempo 0 di una obbligazione con vettore di cedole $C = (C_1, \ldots, C_n)$ ai tempi $T = (T_1, \ldots, T_n)$ e valore nominale N quando r_0 e i parametri a, b e σ sono noti.

```
function obj = Obbl(T,C,N,a,b,sigma,r0)

[n m] = size(C);

for i = 1:n
  B(i) = exp( - T(i) .* Vasicek(T(i),a,b,sigma,r0));
end

C(n) = C(n) + N;

obj = C' * B';

endfunction
```

Implementazione con il modello di Vasicek

Presentiamo ora un'implementazione che usa i programmi già visti con il modello di Vasicek. Il primo programma, chiamato Obbl, fornisce il prezzo al tempo 0 di una obbligazione con vettore di cedole $C = (C_1, \ldots, C_n)$ ai tempi $T = (T_1, \ldots, T_n)$ e valore nominale N quando r_0 e i parametri a, b e σ sono noti.

```
function obj = Obbl(T,C,N,a,b,sigma,r0)

[n m] = size(C);

for i = 1:n
  B(i) = exp( - T(i) .* Vasicek(T(i),a,b,sigma,r0));
end

C(n) = C(n) + N;

obj = C' * B';

endfunction
```

Implementazione con il modello di Vasicek

Presentiamo ora un'implementazione che usa i programmi già visti con il modello di Vasicek. Il primo programma, chiamato Obbl, fornisce il prezzo al tempo 0 di una obbligazione con vettore di cedole $C = (C_1, \ldots, C_n)$ ai tempi $T = (T_1, \ldots, T_n)$ e valore nominale N quando r_0 e i parametri a, b e σ sono noti.

```
function obj = Obbl(T,C,N,a,b,sigma,r0)

[n m] = size(C);

for i = 1:n
  B(i) = exp( - T(i) .* Vasicek(T(i),a,b,sigma,r0));
end

C(n) = C(n) + N;

obj = C' * B';

endfunction
```

File Black

Il secondo programma, chiamato Black, implementa appunto la formula di Black ed ha come input $s_0 := \frac{P(0,T_i)}{P(0,T)}$, K, T e la volatilità $\sigma := \sigma_i$.

```
function y = Black(s0,K,T,sigma)

d1 = log(s0/K)/sigma + sigma/2;

d2 = d1 - sigma;

y = s0 * (0.5 + erf(d1/sqrt(2))/2) - K * (0.5 + erf(d2/sqrt(2))/2);

endfunction
```

Nota: in Octave la funzione N non è implementata, ma è invece implementata la funzione

$$\mathrm{erf}(x) := \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}\, dx = N(\sqrt{2}x) - \frac{1}{2}$$

File Black

Il secondo programma, chiamato Black, implementa appunto la formula di Black ed ha come input $s_0 := \frac{P(0,T_i)}{P(0,T)}$, K, T e la volatilità $\sigma := \sigma_i$.

```
function y = Black(s0,K,T,sigma)

d1 = log(s0/K)/sigma + sigma/2;

d2 = d1 - sigma;

y = s0 * (0.5 + erf(d1/sqrt(2))/2) - K * (0.5 + erf(d2/sqrt(2))/2);

endfunction
```

Nota: in Octave la funzione N non è implementata, ma è invece implementata la funzione

$$\mathrm{erf}(x) := \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}\, dx = N(\sqrt{2}x) - \frac{1}{2}$$

File Black

Il secondo programma, chiamato Black, implementa appunto la formula di Black ed ha come input $s_0 := \frac{P(0,T_i)}{P(0,T)}$, K, T e la volatilità $\sigma := \sigma_i$.

```
function y = Black(s0,K,T,sigma)

d1 = log(s0/K)/sigma + sigma/2;

d2 = d1 - sigma;

y = s0 * (0.5 + erf(d1/sqrt(2))/2) - K * (0.5 + erf(d2/sqrt(2))/2);

endfunction
```

Nota: in Octave la funzione N non è implementata, ma è invece implementata la funzione

$$\mathrm{erf}(x) := \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}\, dx = N(\sqrt{2}x) - \frac{1}{2}$$

File Opzione

L'ultimo programma, chiamato Opzione, fornisce il prezzo al tempo 0 di una opzione call con strike K e maturità T_0 su una obbligazione con vettore di cedole $C = (C_1, \dots, C_n)$ ai tempi $T = (T_1, \dots, T_n)$ e valore nominale N con r_0, a, b e σ noti.

```
function obj = Opzione(K,T0,T,C,N,a,b,sigma,r0)

r = fsolve(@(z) Obbl(T,C,N,a,b,sigma,z) - K,r0);

B0 = exp( - T0 * Vasicek(T0,a,b,sigma,r0));

[n m] = size(C);

for i = 1:n
  B(i) = exp( - T(i) .* Vasicek(T(i),a,b,sigma,r0));
  K(i) = exp( - T(i) .* Vasicek(T(i),a,b,sigma,r));
  s(i) = sigma/a * (1 - exp(-a*(T(i)-T0))) * sqrt((1 - exp(-a* ...
                                                (T(i)-T0)))/2/a);

  capl(i) = Black(B(i),K(i)*B0,T0,s(i));
end

C(n) = C(n) + N;

obj = C' * capl';

endfunction
```

File Opzione

L'ultimo programma, chiamato Opzione, fornisce il prezzo al tempo 0 di una opzione call con strike K e maturità T_0 su una obbligazione con vettore di cedole $C = (C_1, \ldots, C_n)$ ai tempi $T = (T_1, \ldots, T_n)$ e valore nominale N con r_0, a, b e σ noti.

```
function obj = Opzione(K,T0,T,C,N,a,b,sigma,r0)

r = fsolve(@(z) Obbl(T,C,N,a,b,sigma,z) - K,r0);

B0 = exp( - T0 * Vasicek(T0,a,b,sigma,r0));

[n m] = size(C);

for i = 1:n
  B(i) = exp( - T(i) .* Vasicek(T(i),a,b,sigma,r0));
  K(i) = exp( - T(i) .* Vasicek(T(i),a,b,sigma,r));
  s(i) = sigma/a * (1 - exp(-a*(T(i)-T0))) * sqrt((1 - exp(-a* ...
                                          (T(i)-T0)))/2/a);
  capl(i) = Black(B(i),K(i)*B0,T0,s(i));
end

C(n) = C(n) + N;

obj = C' * capl';

endfunction
```