

Metodi stocastici per la finanza

7 settembre 2010

1. Consideriamo il cosiddetto modello di Heston, in cui il prezzo scontato del titolo rischioso evolve secondo

$$dS_t = S_t \sigma_t dW_t$$

dove la volatilità $\sigma = (\sigma_t)_t$ è un processo stocastico con dinamica

$$d\sigma_t = a(b - \sigma_t) dt + \eta \sqrt{|\sigma_t|} dB_t$$

Supponiamo che B e W siano due moti browniani indipendenti.

Scrivere uno schema di Eulero per la simulazione Monte Carlo del processo bidimensionale (S, σ) .

2. Usando le abbreviazioni $L_i(t) = L(t; T_{i-1}, T_i)$ e $p_i(t) = p(t, T_i)$ ed indicando con Q^i la misura martingala equivalente corrispondente a $p_i(t)$ come numeraire, si faccia vedere che, per $t < T_{i-1}$,

$$E^Q \left\{ e^{-\int_t^T r_s ds} L_i(T_{i-1}) \mid \mathcal{F}_t \right\} = p(t, T_i) L_i(t)$$

baseandosi su un opportuno cambio di numeraire.

3. Si consideri un Cap con tasso fisso $R = 0.1$ e capitale di riferimento unitario, contrattato ad un istante t per dei periodi futuri (T_i, T_{i+1}) con $i = 0, 1, 2$ dove $\alpha_{i+1} = T_{i+1} - T_i \equiv 1$. Si supponga dati i prezzi dei seguenti bond

$$p(t, T_0) = \frac{4}{6}, \quad p(t, T_1) = \frac{3}{6}, \quad p(t, T_2) = \frac{2}{6}, \quad p(t, T_3) = \frac{1}{6}$$

Supponendo di sapere che il prezzo di tale Cap è $Cap(t) = 0,6$, utilizzando la Floor-Cap Parity si determini il prezzo del corrispondente Floor

$$Fl(t) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i p(t, T_i) E^i \left\{ (R - L_i(T_{i-1}))^+ \mid \mathcal{F}_t \right\}$$

dove E^i indica il valore atteso nella misura martingala che corrisponde a $p(t, T_i)$ come numeraire e $L_i(T_{i-1})$ è un'abbreviazione per $L(t; T_{i-1}, T_i)$.

1. Fissato $n \in \mathbb{N}^*$, chiamiamo $\Delta := 1/n$ e consideriamo due successioni indipendenti di v. al. indipendenti $(W_n^1)_n$ e $(W_n^2)_n$, ciascuna di legge $N(0, \Delta)$. Allora lo schema di Eulero per la coppia (S, σ) consiste nel definire le successioni $(S_k^n)_k$ e $(\sigma_k^n)_k$ come

$$\begin{aligned} S_{k+1}^n &= S_k^n + S_k^n \sigma_k^n W_{k+1}^1 = S_k^n (1 + \sigma_k^n W_{k+1}^1), \\ \sigma_{k+1}^n &= \sigma_k^n + a(b - \sigma_k^n) \Delta + \eta \sqrt{|\sigma_k^n|} W_{k+1}^2 = \sigma_k^n (1 - a \Delta) + ab \Delta + \eta \sqrt{|\sigma_k^n|} W_{k+1}^2 \end{aligned}$$

2. Si ha

$$\begin{aligned} E^Q \left\{ e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} L_i(T_{i-1}) \mid \mathcal{F}_t \right\} &= B_t E^Q \left\{ \frac{L_i(T_{i-1})}{B_{T_i}} \mid \mathcal{F}_t \right\} \\ &= p(t, T_i) E^{Q^i} \{ L_i(T_{i-1}) \mid \mathcal{F}_t \} = p(t, T_i) L_i(t) \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza scende dal fatto che $L_i(t)$ è una martingala in Q^i .

3. Avendosi

$$(R - L)^+ = (L - R)^+ + (R - L)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^3 \alpha_i p(t, T_i) E^i \left\{ (R - L_i(T_{i-1}))^+ \mid \mathcal{F}_t \right\} \\ &= \sum_{i=1}^3 \alpha_i p(t, T_i) E^i \left\{ (L_i(T_{i-1}) - R)^+ \mid \mathcal{F}_t \right\} + \sum_{i=1}^3 \alpha_i p(t, T_i) E^i \left\{ (R - L_i(T_{i-1})) \mid \mathcal{F}_t \right\} \end{aligned}$$

dove il primo termine a destra è il prezzo del Cap, mentre il secondo termine a destra è il prezzo in t di un Receiver Forward Swap con tasso fisso R e quindi dato da

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^3 \alpha_i p(t, T_i) E^i \left\{ (R - L_i(T_{i-1})) \mid \mathcal{F}_t \right\} = RSW_0^3(t, R) \\ &= R \sum_{i=1}^3 \alpha_i p(t, T_i) - (p(t, T_0) - p(t, T_3)) = 0.1 - \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = -0.4 \end{aligned}$$

In conclusione

$$Fl(t) = 0.6 - 0.4 = 0.2$$