Metodi stocastici per la finanza

13 settembre 2011

1. Consideriamo una estensione del modello CIR, in cui il tasso spot evolve secondo

$$dr_t = (\theta(t) - ar_t)\ dt + \sigma\sqrt{|r_t|}\ dW_t$$

dove $\theta : [0, T] \to \mathbb{R}$ è una funzione deterministica del tempo, e W è un moto browniano.

Scrivere uno schema di Eulero per la simulazione Monte Carlo del processo r.

2. Usando le abbreviazioni $L_i(t) = L(t; T_{i-1}, T_i)$ e $p_i(t) = p(t, T_i)$ ed indicando con Q^i la misura martingala equivalente corrispondente a $p_i(t)$ come numeraire, si faccia vedere che, per $t < T_{i-1}$,

$$E^Q \left\{ e^{-\int_t^T r_s ds} L_i(T_{i-1}) \mid \mathcal{F}_t \right\} = p(t, T_i) L_i(t)$$

baseandosi su un opportuno cambio di numeraire.

3. Si consideri un Cap con tasso fisso $R = 0.1$ e capitale di riferimento unitario, contrattato ad un istante t per dei periodi futuri (T_i, T_{i+1}) con $i = 0, 1, 2$ dove $\alpha_{i+1} = T_{i+1} - T_i \equiv 1$. Si supponga dati i prezzi dei seguenti bond

$$p(t, T_0) = \frac{4}{6}, \quad p(t, T_1) = \frac{3}{6}, \quad p(t, T_2) = \frac{2}{6}, \quad p(t, T_3) = \frac{1}{6}$$

Supponendo di sapere che il prezzo di tale Cap è $Cap(t) = 0,6$, utilizzando la Floor-Cap Parity si determini il prezzo del corrispondente Floor

$$Fl(t) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i p(t, T_i)\, E^i \left\{ (R - L_i(T_{i-1}))^+ \mid \mathcal{F}_t \right\}$$

dove E^i indica il valore atteso nella misura martingala che corrisponde a $p(t, T_i)$ come numèraire e $L_i(T_{i-1})$ è un'abbreviazione per $L(t; T_{i-1}, T_i)$.

1. Fissato $n \in \mathbb{N}^*$, chiamiamo $\Delta := 1/n$ e consideriamo una successione di v. al. indipendenti $(W_n)_n$, ciascuna di legge $N(0,\Delta)$. Il processo r è di Markov ma non omogeneo, poichè la sua dinamica dipende anche dal tempo. È allora sufficiente definire il secondo processo di Markov, dall'evoluzione deterministica, come $T_t := t$ per ogni $t \geq 0$. La sua dinamica è ovviamente

$$dT_t = dt$$

Allora lo schema di Eulero per (r,T) consiste nel definire le successioni $(r_k^n)_k$ e $(T_k^n)_k$ come

$$\begin{aligned} T_{k+1}^n &= T_k^n + \Delta = k\Delta, \\ r_{k+1}^n &= r_k^n + (\theta(T_k^n) - ar_k^n)\Delta + \sigma\sqrt{|r_k^n|}W_{k+1} = r_k^n(1-a\Delta) + \theta(k\Delta)\Delta + \sigma\sqrt{|r_k^n|}W_{k+1} \end{aligned}$$

2. Si ha

$$\begin{aligned} & E^Q\left\{e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} L_i(T_{i-1}) \mid \mathcal{F}_t\right\} = B_t E^Q\left\{\tfrac{L_i(T_{i-1})}{B_{T_i}} \mid \mathcal{F}_t\right\} \\ & = p(t,T_i) E^{Q^i}\left\{L_i(T_{i-1}) \mid \mathcal{F}_t\right\} = p(t,T_i)\, L_i(t) \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza scende dal fatto che $L_i(t)$ è una martingala in Q^i.

3. Avendosi

$$(R-L)^+ = (L-R)^+ + (R-L)$$

si ottiene

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i p(t,T_i)\, E^i\left\{(R - L_i(T_{i-1}))^+ \mid \mathcal{F}_t\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \alpha_i p(t,T_i)\, E^i\left\{(L_i(T_{i-1} - R))^+ \mid \mathcal{F}_t\right\} + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i p(t,T_i)\, E^i\left\{(R - L_i(T_{i-1})) \mid \mathcal{F}_t\right\}$$

dove il primo termine a destra è il prezzo del Cap, mentre il secondo termine a destra è il prezzo in t di un Receiver Froward Swap con tasso fisso R e quindi dato da

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i p(t,T_i)\, E^i\left\{(R - L_i(T_{i-1})) \mid \mathcal{F}_t\right\} = RSW_0^3(t,R)$$

$$= R\sum_{i=1}^{3} \alpha_i p(t,T_i) - (p(t,T_0) - p(t,T_3)) = 0.1 - \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = -0.4$$

In conclusione

$$Fl(t) = 0.6 - 0.4 = 0.2$$