Metodi stocastici per la finanza

17 settembre 2012

1. Supponiamo che il prezzo al tempo 0 di un titolo sia $S_0 = 32$ Euro , lo zero-coupon bond con scadenza $T = 1$ anno valga 0.90 e che sul mercato siano presenti put a 1 anno, una con strike price $K = 30$ Euro al prezzo di 1 Euro e un'altra con strike $K = 32$ Euro al prezzo di 3 Euro.

1. Dare limitazioni inferiori e superiori per il prezzo di una put a 1 anno con strike $K = 31$.
2. Supponiamo che sul mercato sia presente una call a 1 anno, con strike $K = 31$ e prezzo 5.5 Euro. Questo prezzo è coerente con la limitazione trovata nel punto 1.?

2. Si consideri un mercato (completo) con due titoli rischiosi, i cui prezzi seguano la seguente dinamica nella misura martingala Q

$$\begin{cases} dS_t^1 &= S_t^1\,[r_t dt + \sigma_t^1 dw_t^Q] \\ \\ dS_t^2 &= S_t^2\,[r_t dt + \sigma_t^{2,1} dw_t^Q + \sigma_t^{2,2} dv_t^Q] \end{cases}$$

dove w_t^Q e v_t^Q sono due $Q-$Wiener indipendenti. Indichiamo con Q^1 la MM equivalente con numeraire S_t^1 e siano $L := \frac{dQ^1}{dQ}$, $L_t := E^Q\{L \mid \mathcal{F}_t\} = \frac{dQ^1_{|\mathcal{F}_t}}{dQ_{|\mathcal{F}_t}}$.

1. Si faccia vedere che, in Q,
$$dL_t = L_t \sigma_t^1 dw_t^Q$$
2. (fac.) Qual'é la dinamica di S_t^1 e S_t^2 in Q^1?

3. Si supponga che nella misura martingala Q^i con $p(t, T_i)$ come numeraire il tasso a breve segua la dinamica

$$dr_t = a^i\, r_t dt + \sigma \sqrt{r_t}\, dw_t$$

con w_t^i un $(Q^i, \mathcal{F}_t)-$Wiener. Risulta allora che, per una generica scadenza T, il prezzo del bond ha la rappresentazione $p(t, T) = \exp[A(t, T) - B(t, T)r_t]$. Supponendo $T_i - T_{i-1} = 1$, si sa che $L(t, T_{i-1}, T_i) = \frac{p(t,T_{i-1}}{p(t,T_i)} - 1$.

Determinare la dinamica congiunta di $(r_t, L(t, T_{i-1}, T_i))$ nella misura Q^i (Sugg.: si applichi la formula di Ito per ottenere $dL(t, T_{i-1}, T_i))$. Tale dinamica é Markoviana?

Soluzioni

1. Bisogna che siano rispettate la monotonia (crescente) e la convessità dei prezzi delle put, ossia della funzione $K \to P_0(T,K)$: la prima dà un limite inferiore $P_0(1,31) > 1$, mentre la seconda dà un limite superiore $P_0(1,31) < 2$.

Dalla parità call-put

$$C_t(T,K) - P_t(T,K) = S_t - KB(t,T)$$

si ha che

$$P_t(1,31) = 31 \cdot 0.9 - 32 + 5.5 = 1.4$$

che è coerente con le limitazioni del punto 1.

2. 1. Da $L_t = \frac{S_t^1}{S_0^1 B_t}$ si ha

$$\begin{aligned} dL_t &= \tfrac{1}{S_0^1}\left[\tfrac{1}{B_t} dS_t^1 - r_t \tfrac{1}{B_t} S_t^1 dt\right] \\ &= L_t r_t dt + L_t \sigma_t^1 dw_t^Q - L_t r_t dt = L_t \sigma_t^1 dw_t^Q \end{aligned}$$

2. Nella Q^1 si ha

$$\begin{cases} dw_t^{Q^1} &= dw_t^Q - \sigma_t^1 dt \\ dv_t^{Q^1} &= dv_t^Q \end{cases}$$

per cui

$$\begin{cases} dS_t^1 &= S_t^1 \left[(r_t + (\sigma_t^1)^2)dt + \sigma_t^1 dw_t^{Q^1}\right] \\ \\ dS_t^2 &= S_t^2 \left[(r_t + \sigma_t^{2,1}\sigma_t^1)dt + \sigma_t^{2,1} dw_t^{Q^1} + \sigma_t^{2,2} dv_t^{Q^1}\right] \end{cases}$$

3. Si ha

$$\begin{aligned} dL_t(t) &= -\tfrac{p_{i-1}(t)}{p_i(t)}(B(t,T_{i-1}) - B(t,T_i))\sigma\sqrt{r_t}dw_t^i \\ &= -(L_i(t)+1)\,(B(t,T_{i-1}) - B(t,T_i))\sigma\sqrt{r_t}dw_t^i \end{aligned}$$

con r_t che segue la dinamica iniziale e da cui si vede che la dinamica é Markoviana.