Metodi stocastici per la finanza

15 giugno 2012

1. Supponiamo di avere una struttura a termine dei tassi di interessi per cui $p(t,T) = e^{-(T-t)X_t}$, dove X è un processo stocastico unidimensionale con una certa dinamica, e di voler prezzare una call di strike 1 su una obbligazione a 3 anni con cedole annuali pari a 0 per il primo anno e 10% per il secondo e terzo anno, e valore nominale 1.

1. Scrivere il prezzo della call sulla obbligazione come combinazione lineare di prezzi di call su zero-coupon bonds, usando la decomposizione di Jamshidian.
2. Nel caso in cui l'opzione abbia maturità 1 anno, calcolare quanto devono valere i prezzi strike delle call su zero-coupon bonds.

2. Usando le abbreviazioni $L_i(t) = L(t; T_{i-1}, T_i)$ e $p_i(t) = p(t, T_i)$ ed indicando con Q^i la misura martingala equivalente corrispondente a $p_i(t)$ come numeraire, si faccia vedere che, per $t < T_{i-1}$,

$$E^Q \left\{ e^{-\int_t^T r_s ds} L_i(T_{i-1}) \mid \mathcal{F}_t \right\} = p(t,T_i) L_i(t)$$

baseandosi su un opportuno cambio di numeraire.

3. Si consideri un Cap con tasso fisso $R = 0.1$ e capitale di riferimento unitario, contrattato ad un istante t per dei periodi futuri (T_i, T_{i+1}) con $i = 0, 1, 2$ dove $\alpha_{i+1} = T_{i+1} - T_i \equiv 1$. Si supponga dati i prezzi dei seguenti bond

$$p(t,T_0) = \frac{4}{6}, \quad p(t,T_1) = \frac{3}{6}, \quad p(t,T_2) = \frac{2}{6}, \quad p(t,T_3) = \frac{1}{6}$$

Supponendo di sapere che il prezzo di tale Cap è $Cap(t) = 0,6$, utilizzando la Floor-Cap Parity si determini il prezzo del corrispondente Floor

$$Fl(t) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i p(t,T_i) \, E^i \left\{ (R - L_i(T_{i-1}))^+ \mid \mathcal{F}_t \right\}$$

dove E^i indica il valore atteso nella misura martingala che corrisponde a $p(t, T_i)$ come numèraire e $L_i(T_{i-1})$ è un'abbreviazione per $L(t; T_{i-1}, T_i)$.

1. 1. Siccome i prezzi degli zero-coupon bonds sono comonotoni decrescenti rispetto a X_t, la decomposizione di Jamshidian è

$$\begin{aligned} C_0 &= E[e^{-\int_0^T r_u\ du}(O_T - K)^+] = \\ &= \sum_{i=1}^{n} C_i E[e^{-\int_0^T r_u\ du}(p(T,T_i;X_T) - K_i)^+] + NE[e^{-\int_0^T r_u\ du}(p(T,T_n;X_T) - K_n)^+] \end{aligned}$$

dove $K_i := p(T,T_i;X^*)$ ed X^* è tale che

$$\sum_{i=2}^{3} C_i p(T,T_i;X^*) + Np(T,T_n;X^*) = K$$

con $T_k := k$ (le cedole sono annuali).

2. Con i dati a disposizione, si ha $T = 1$, e quindi

$$C_2 p(T,T_2;X^*) + C_3 p(T,T_3;X^*) + Np(T,T_3;X^*) = K$$

Siccome $p(t,T) = e^{-(T-t)X_t}$, abbiamo

$$0.1e^{-(2-1)X^*} + 0.1e^{-(3-1)X^*} + e^{-(3-1)X^*} = 1$$

Ponendo $x := e^{-X^*}$, ci si riconduce a risolvere la seguente equazione di secondo grado

$$1.1x^2 + 0.1x - 1 = 0$$

le cui soluzioni sono

$$x_{1,2} = \frac{-0.1 \pm 2.1}{2 \cdot 1.1}$$

Una soluzione è -1, da scartare poichè negativa; rimane l'altra soluzione $x = \frac{2}{2.2} \simeq 0.91$, che dà $X^* = -\log x \simeq 0.0953$. Gli strike vengono allora ad essere

$$K_1 = p(1,2;X^*) = e^{-X^*} = x \simeq 0.91, \qquad K_2 = p(1,3;X^*) = e^{-2X^*} = x^2 \simeq 0.82$$

2. Si ha

$$\begin{aligned} &E^Q\left\{e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} L_i(T_{i-1}) \mid \mathcal{F}_t\right\} = B_t E^Q\left\{\tfrac{L_i(T_{i-1})}{B_{T_i}} \mid \mathcal{F}_t\right\} \\ &= p(t,T_i) E^{Q^i}\left\{L_i(T_{i-1}) \mid \mathcal{F}_t\right\} = p(t,T_i)\, L_i(t) \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza scende dal fatto che $L_i(t)$ è una martingala in Q^i.

3. Avendosi

$$(R - L)^+ = (L - R)^+ + (R - L)$$

si ottiene

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i p(t,T_i)\, E^i\left\{(R - L_i(T_{i-1}))^+ \mid \mathcal{F}_t\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \alpha_i p(t,T_i)\, E^i\left\{(L_i(T_{i-1} - R))^+ \mid \mathcal{F}_t\right\} + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i p(t,T_i)\, E^i\left\{(R - L_i(T_{i-1})) \mid \mathcal{F}_t\right\}$$

dove il primo termine a destra è il prezzo del Cap, mentre il secondo termine a destra è il prezzo in t di un Receiver Froward Swap con tasso fisso R e quindi dato da

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i p(t, T_i)\, E^i \left\{ (R - L_i(T_{i-1})) \mid \mathcal{F}_t \right\} = RSW_0^3(t, R)$$

$$= R \sum_{i=1}^{3} \alpha_i p(t, T_i) - (p(t, T_0) - p(t, T_3)) = 0.1 - \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = -0.4$$

In conclusione

$$Fl(t) = 0.6 - 0.4 = 0.2$$