

Metodi stocastici per la finanza

14 luglio 2010

1. Supponiamo che il prezzo al tempo 0 di un titolo sia $S_0 = 32$ Euro, lo zero-coupon bond con scadenza $T = 1$ anno valga 0.90 e che sul mercato siano presenti put a 1 anno, una con strike price $K = 30$ Euro al prezzo di 1 Euro e un'altra con strike $K = 32$ Euro al prezzo di 3 Euro.
 1. Dare limitazioni inferiori e superiori per il prezzo di una put a 1 anno con strike $K = 31$.
 2. Supponiamo che sul mercato sia presente una call a 1 anno, con strike $K = 31$ e prezzo 5.5 Euro. Questo prezzo è coerente con la limitazione trovata nel punto 1.?
2. Usando le abbreviazioni $L_i(t) = L(t; T_{i-1}, T_i)$ e $p_i(t) = p(t, T_i)$ ed indicando con Q^i la misura martingala equivalente corrispondente a $p_i(t)$ come numeraire, si faccia vedere che, per $t < T_{i-1}$,

$$E^{Q^i} \left\{ e^{-\int_t^T r_s ds} L_i(T_{i-1}) \mid \mathcal{F}_t \right\} = p(t, T_i) L_i(t)$$

baseandosi su un opportuno cambio di numeraire.

3. Si consideri un Cap con tasso fisso $R = 0.1$ e capitale di riferimento unitario, contrattato ad un istante t per dei periodi futuri (T_i, T_{i+1}) con $i = 0, 1, 2$ dove $\alpha_{i+1} = T_{i+1} - T_i \equiv 1$. Si supponga dati i prezzi dei seguenti bond

$$p(t, T_0) = \frac{4}{6}, \quad p(t, T_1) = \frac{3}{6}, \quad p(t, T_2) = \frac{2}{6}, \quad p(t, T_3) = \frac{1}{6}$$

Supponendo di sapere che il prezzo di tale Cap è $Cap(t) = 0,6$, utilizzando la Floor-Cap Parity si determini il prezzo del corrispondente Floor

$$Fl(t) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i p(t, T_i) E^i \left\{ (R - L_i(T_{i-1}))^+ \mid \mathcal{F}_t \right\}$$

dove E^i indica il valore atteso nella misura martingala che corrisponde a $p(t, T_i)$ come numeraire e $L_i(T_{i-1})$ è un'abbreviazione per $L(t; T_{i-1}, T_i)$.

1. 1. Bisogna che siano rispettate la monotonia (crescente) e la convessità dei prezzi delle put, ossia della funzione $K \rightarrow P_0(T, K)$: la prima dà un limite inferiore $P_0(1, 31) > 1$, mentre la seconda dà un limite superiore $P_0(1, 31) < 2$.
2. Dalla parità call-put

$$C_t(T, K) - P_t(T, K) = S_t - KB(t, T)$$

si ha che

$$P_t(1, 31) = 31 \cdot 0.9 - 32 + 5.5 = 1.4$$

che è coerente con le limitazioni del punto 1.

2. Si ha

$$\begin{aligned} E^Q \left\{ e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} L_i(T_{i-1}) \mid \mathcal{F}_t \right\} &= B_t E^Q \left\{ \frac{L_i(T_{i-1})}{B_{T_i}} \mid \mathcal{F}_t \right\} \\ &= p(t, T_i) E^{Q^i} \{ L_i(T_{i-1}) \mid \mathcal{F}_t \} = p(t, T_i) L_i(t) \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza scende dal fatto che $L_i(t)$ è una martingala in Q^i .

3. Avendosi

$$(R - L)^+ = (L - R)^+ + (R - L)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^3 \alpha_i p(t, T_i) E^i \left\{ (R - L_i(T_{i-1}))^+ \mid \mathcal{F}_t \right\} \\ &= \sum_{i=1}^3 \alpha_i p(t, T_i) E^i \left\{ (L_i(T_{i-1}) - R)^+ \mid \mathcal{F}_t \right\} + \sum_{i=1}^3 \alpha_i p(t, T_i) E^i \left\{ (R - L_i(T_{i-1})) \mid \mathcal{F}_t \right\} \end{aligned}$$

dove il primo termine a destra è il prezzo del Cap, mentre il secondo termine a destra è il prezzo in t di un Receiver Forward Swap con tasso fisso R e quindi dato da

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^3 \alpha_i p(t, T_i) E^i \left\{ (R - L_i(T_{i-1})) \mid \mathcal{F}_t \right\} = RSW_0^3(t, R) \\ &= R \sum_{i=1}^3 \alpha_i p(t, T_i) - (p(t, T_0) - p(t, T_3)) = 0.1 - \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = -0.4 \end{aligned}$$

In conclusione

$$Fl(t) = 0.6 - 0.4 = 0.2$$