Metodi stocastici per la finanza

13 settembre 2011

1. Consideriamo un modello dove il prezzo di un titolo, sotto la misura del mondo reale, è $S_t = e^{X_t}$, dove X è un processo di Ornstein-Uhlenbeck con dinamica

$$dX_t = a(b - X_t)\ dt + \sigma\ dW_t$$

dove W è un moto browniano.

1. Scrivere uno schema di Eulero per la simulazione Monte Carlo del processo X.
2. Scrivere uno schema di Eulero per simulare direttamente il processo S.

2. Usando le abbreviazioni $L_i(t) = L(t; T_{i-1}, T_i)$ e $p_i(t) = p(t, T_i)$ ed indicando con Q^i la misura martingala equivalente corrispondente a $p_i(t)$ come numeraire, si faccia vedere che, per $t < T_{i-1}$,

$$E^Q \left\{ e^{-\int_t^T r_s ds} L_i(T_{i-1}) \mid \mathcal{F}_t \right\} = p(t, T_i) L_i(t)$$

baseandosi su un opportuno cambio di numeraire.

3. Si consideri un Cap con tasso fisso $R = 0.1$ e capitale di riferimento unitario, contrattato ad un istante t per dei periodi futuri (T_i, T_{i+1}) con $i = 0, 1, 2$ dove $\alpha_{i+1} = T_{i+1} - T_i \equiv 1$. Si supponga dati i prezzi dei seguenti bond

$$p(t, T_0) = \frac{4}{6}, \quad p(t, T_1) = \frac{3}{6}, \quad p(t, T_2) = \frac{2}{6}, \quad p(t, T_3) = \frac{1}{6}$$

Supponendo di sapere che il prezzo di tale Cap è $Cap(t) = 0,6$, utilizzando la Floor-Cap Parity si determini il prezzo del corrispondente Floor

$$Fl(t) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i p(t, T_i)\, E^i \left\{ (R - L_i(T_{i-1}))^+ \mid \mathcal{F}_t \right\}$$

dove E^i indica il valore atteso nella misura martingala che corrisponde a $p(t, T_i)$ come numèraire e $L_i(T_{i-1})$ è un'abbreviazione per $L(t; T_{i-1}, T_i)$.

1. 1. Fissato $n \in \mathbb{N}^*$, chiamiamo $\Delta := 1/n$ e consideriamo una successione di v. al. indipendenti $(W_n)_n$, ciascuna di legge $N(0, \Delta)$. Il processo X è di Markov, e lo schema di Eulero per simularlo consiste nel definire la successione $(X_k^n)_k$ come

$$X_{k+1}^n = X_k^n + a(b - X_k^n)\Delta + \sigma W_{k+1} = X_k^n(1 - a\Delta) + ab\Delta + \sigma W_{k+1}$$

2. Per simulare direttamente S, innanzitutto controlliamo che sia un processo di Markov: abbiamo

$$\begin{aligned} dS_t &= e^{X_t}\, dX_t + \frac{1}{2} e^{X_t}\, d\langle X\rangle_t = S_t(a(b - X_t)\, dt + \sigma\, dW_t) + \frac{1}{2} S_t \sigma^2\, dt = \\ &= S_t \left(ab + \frac{1}{2}\sigma^2 - a \log S_t \right) dt + \sigma S_t\, dW_t \end{aligned}$$

quindi S è un processo di Markov. Lo schema di Eulero per simularlo consiste nel definire la successione $(S_k^n)_k$ come

$$\begin{aligned} S_{k+1}^n &= S_k^n + S_k^n \left(ab + \frac{1}{2}\sigma^2 - a \log S_k^n \right) \Delta + \sigma S_k^n W_{k+1} = \\ &= S_k^n \left(1 + \left(ab + \frac{1}{2}\sigma^2 - a \log S_k^n \right) \Delta \right) + \sigma S_k^n W_{k+1} \end{aligned}$$

2. Si ha

$$\begin{aligned} &E^Q \left\{ e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} L_i(T_{i-1}) \mid \mathcal{F}_t \right\} = B_t E^Q \left\{ \tfrac{L_i(T_{i-1})}{B_{T_i}} \mid \mathcal{F}_t \right\} \\ &= p(t, T_i) E^{Q^i} \{ L_i(T_{i-1}) \mid \mathcal{F}_t \} = p(t, T_i)\, L_i(t) \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza scende dal fatto che $L_i(t)$ è una martingala in Q^i.

3. Avendosi

$$(R - L)^+ = (L - R)^+ + (R - L)$$

si ottiene

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i p(t, T_i)\, E^i \left\{ (R - L_i(T_{i-1}))^+ \mid \mathcal{F}_t \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \alpha_i p(t, T_i)\, E^i \left\{ (L_i(T_{i-1} - R))^+ \mid \mathcal{F}_t \right\} + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i p(t, T_i)\, E^i \left\{ (R - L_i(T_{i-1})) \mid \mathcal{F}_t \right\}$$

dove il primo termine a destra è il prezzo del Cap, mentre il secondo termine a destra è il prezzo in t di un Receiver Froward Swap con tasso fisso R e quindi dato da

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i p(t, T_i)\, E^i \left\{ (R - L_i(T_{i-1})) \mid \mathcal{F}_t \right\} = RSW_0^3(t, R)$$

$$= R \sum_{i=1}^{3} \alpha_i p(t, T_i) - (p(t, T_0) - p(t, T_3)) = 0.1 - \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = -0.4$$

In conclusione

$$Fl(t) = 0.6 - 0.4 = 0.2$$