

Metodi stocastici per la finanza

20 febbraio 2012

1. Le obbligazioni greche sono tutte emesse alla pari e con valore nominale di 100. In data 20/2/2012, una obbligazione greca al 4% con scadenza 6 mesi ha prezzo di mercato 25.50 e una obbligazione greca sempre con cedola al 4% ma con scadenza 18 mesi ha prezzo di mercato 23.38.
 1. Quanto valgono i prezzi degli zero-coupon bonds a 6 mesi e a 18 mesi?
 2. Se la Grecia volesse emettere un'obbligazione a 18 mesi, quale sarà il valore della cedola per poterla emettere alla pari (i.e. con prezzo = 100)?
2. Usando le abbreviazioni $L_i(t) = L(t; T_{i-1}, T_i)$ e $p_i(t) = p(t, T_i)$ ed indicando con Q^i la misura martingala equivalente corrispondente a $p_i(t)$ come numeraire, si faccia vedere che, per $t < T_{i-1}$,

$$E^Q \left\{ e^{-\int_t^T r_s ds} L_i(T_{i-1}) \mid \mathcal{F}_t \right\} = p(t, T_i) L_i(t)$$

baseandosi su un opportuno cambio di numeraire.

3. Si consideri un Cap con tasso fisso $R = 0.1$ e capitale di riferimento unitario, contrattato ad un istante t per dei periodi futuri (T_i, T_{i+1}) con $i = 0, 1, 2$ dove $\alpha_{i+1} = T_{i+1} - T_i \equiv 1$. Si supponga dati i prezzi dei seguenti bond

$$p(t, T_0) = \frac{4}{6}, \quad p(t, T_1) = \frac{3}{6}, \quad p(t, T_2) = \frac{2}{6}, \quad p(t, T_3) = \frac{1}{6}$$

Supponendo di sapere che il prezzo di tale Cap è $Cap(t) = 0,6$, utilizzando la Floor-Cap Parity si determini il prezzo del corrispondente Floor

$$Fl(t) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i p(t, T_i) E^i \left\{ (R - L_i(T_{i-1}))^+ \mid \mathcal{F}_t \right\}$$

dove E^i indica il valore atteso nella misura martingala che corrisponde a $p(t, T_i)$ come numeraire e $L_i(T_{i-1})$ è un'abbreviazione per $L(t; T_{i-1}, T_i)$.

1. 1. Chiamando x e y i prezzi degli zero-coupon bonds rispettivamente a 6 e 18 mesi, i prezzi delle obbligazioni del testo ci permettono di scrivere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 25.50 &= (1 + 0.04 \cdot 0.5)x, \\ 23.46 &= 0.04 \cdot 0.5x + (1 + 0.04)y. \end{cases}$$

che, per eliminazioni successive, ha come unica soluzione $(x, y) = (25, 22)$.

2. La cedola C che ci dà un'emissione alla pari è tale che

$$100 = 0.5Cx + (1 + C)y = C(0.5x + y) + y$$

e quindi

$$C = \frac{100 - y}{0.5x + y} = \frac{200 - 2y}{x + 2y} = \frac{200 - 44}{25 + 44} = \frac{156}{69} = 2.26 = 226\%$$

2. Si ha

$$\begin{aligned} E^Q \left\{ e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} L_i(T_{i-1}) \mid \mathcal{F}_t \right\} &= B_t E^Q \left\{ \frac{L_i(T_{i-1})}{B_{T_i}} \mid \mathcal{F}_t \right\} \\ &= p(t, T_i) E^{Q^i} \{ L_i(T_{i-1}) \mid \mathcal{F}_t \} = p(t, T_i) L_i(t) \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza scende dal fatto che $L_i(t)$ è una martingala in Q^i .

3. Avendosi

$$(R - L)^+ = (L - R)^+ + (R - L)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^3 \alpha_i p(t, T_i) E^i \left\{ (R - L_i(T_{i-1}))^+ \mid \mathcal{F}_t \right\} \\ &= \sum_{i=1}^3 \alpha_i p(t, T_i) E^i \left\{ (L_i(T_{i-1}) - R)^+ \mid \mathcal{F}_t \right\} + \sum_{i=1}^3 \alpha_i p(t, T_i) E^i \left\{ (R - L_i(T_{i-1})) \mid \mathcal{F}_t \right\} \end{aligned}$$

dove il primo termine a destra è il prezzo del Cap, mentre il secondo termine a destra è il prezzo in t di un Receiver Forward Swap con tasso fisso R e quindi dato da

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i p(t, T_i) E^i \left\{ (R - L_i(T_{i-1})) \mid \mathcal{F}_t \right\} = RSW_0^3(t, R)$$

$$= R \sum_{i=1}^3 \alpha_i p(t, T_i) - (p(t, T_0) - p(t, T_3)) = 0.1 - \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = -0.4$$

In conclusione

$$Fl(t) = 0.6 - 0.4 = 0.2$$