Metodi stocastici per la finanza

7 settembre 2010

1. Supponiamo che le obbligazioni abbiano tutte un valore nominale di 100, che il prezzo al tempo 0 di uno zero-coupon bond a 1 anno sia 90, che il prezzo di una obbligazione a 2 anni con cedola annuale del 10% sia 97 e che il prezzo di una obbligazione a 3 anni con cedola annuale dell'8% sia 79.2.

Quanto valgono i prezzi degli zero-coupon bonds a 1, 2 e 3 anni?

2. Usando le abbreviazioni $L_i(t) = L(t; T_{i-1}, T_i)$ e $p_i(t) = p(t, T_i)$ ed indicando con Q^i la misura martingala equivalente corrispondente a $p_i(t)$ come numeraire, si faccia vedere che, per $t < T_{i-1}$,

$$E^Q \left\{ e^{-\int_t^T r_s ds} L_i(T_{i-1}) \mid \mathcal{F}_t \right\} = p(t, T_i) L_i(t)$$

baseandosi su un opportuno cambio di numeraire.

3. Si consideri un Cap con tasso fisso $R = 0.1$ e capitale di riferimento unitario, contrattato ad un istante t per dei periodi futuri (T_i, T_{i+1}) con $i = 0, 1, 2$ dove $\alpha_{i+1} = T_{i+1} - T_i \equiv 1$. Si supponga dati i prezzi dei seguenti bond

$$p(t, T_0) = \frac{4}{6}, \quad p(t, T_1) = \frac{3}{6}, \quad p(t, T_2) = \frac{2}{6}, \quad p(t, T_3) = \frac{1}{6}$$

Supponendo di sapere che il prezzo di tale Cap è $Cap(t) = 0,6$, utilizzando la Floor-Cap Parity si determini il prezzo del corrispondente Floor

$$Fl(t) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i p(t, T_i)\, E^i \left\{ (R - L_i(T_{i-1}))^+ \mid \mathcal{F}_t \right\}$$

dove E^i indica il valore atteso nella misura martingala che corrisponde a $p(t, T_i)$ come numèraire e $L_i(T_{i-1})$ è un'abbreviazione per $L(t; T_{i-1}, T_i)$.

1. Chiamando x, y, z i prezzi degli zero-coupon bonds rispettivamente a 1, 2 e 3 anni, i prezzi delle obbligazioni del testo ci permettono di scrivere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 90 & = & 1 \cdot x, & & \\ 97 & = & 0.1x & +(0.1+1)y, & \\ 79.2 & = & 0.08x & +0.08y & +(0.08+1)z. \end{cases}$$

che, per eliminazioni successive, ha come unica soluzione $(x, y, z) = (90, 80, 70)$.

2. Si ha

$$E^Q\left\{e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} L_i(T_{i-1}) \mid \mathcal{F}_t\right\} = B_t E^Q\left\{\frac{L_i(T_{i-1})}{B_{T_i}} \mid \mathcal{F}_t\right\}$$
$$= p(t, T_i) E^{Q^i}\left\{L_i(T_{i-1}) \mid \mathcal{F}_t\right\} = p(t, T_i)\, L_i(t)$$

dove l'ultima uguaglianza scende dal fatto che $L_i(t)$ è una martingala in Q^i.

3. Avendosi

$$(R - L)^+ = (L - R)^+ + (R - L)$$

si ottiene

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i p(t, T_i)\, E^i\left\{(R - L_i(T_{i-1}))^+ \mid \mathcal{F}_t\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \alpha_i p(t, T_i)\, E^i\left\{(L_i(T_{i-1} - R))^+ \mid \mathcal{F}_t\right\} + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i p(t, T_i)\, E^i\left\{(R - L_i(T_{i-1})) \mid \mathcal{F}_t\right\}$$

dove il primo termine a destra è il prezzo del Cap, mentre il secondo termine a destra è il prezzo in t di un Receiver Froward Swap con tasso fisso R e quindi dato da

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i p(t, T_i)\, E^i\left\{(R - L_i(T_{i-1})) \mid \mathcal{F}_t\right\} = RSW_0^3(t, R)$$

$$= R \sum_{i=1}^{3} \alpha_i p(t, T_i) - (p(t, T_0) - p(t, T_3)) = 0.1 - \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = -0.4$$

In conclusione

$$Fl(t) = 0.6 - 0.4 = 0.2$$