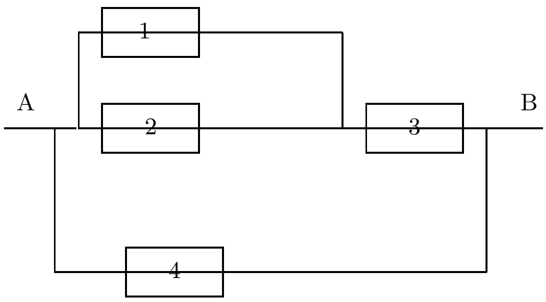
Probabilità e Statistica (LT in Matematica)
Prof. P.Dai Pra, prova scritta 16/03/2004.

Cognome: Nome:

Matricola: Firma:

ESERCIZIO 1. Un congegno elettronico è strutturato come nel seguente diagramma



Il segnale entra attraverso A e raggiunge B se *almeno* uno dei percorsi segnati è "aperto". Ognuna delle componenti $1, 2, 3$ e 4 ha probabilità $p \in (0, 1)$ di essere "chiusa", indipendentemente dalle altre.

a. Qual è la probabilità che il congegno funzioni, cioè che il segnale entrante in A raggiunga B?

b. Sapendo che il segnale ha raggiunto B, qual è la probabilità che la componente 4 sia aperta?

Soluzione. a. Le componenti 1 e 2 sono in parallelo, quindi la probabilità che il sottosistema da esse costituito non funzioni è p^2. La componente 3 e' in serie alle componenti 1 e 2. Quindi la probabilità che il sottosistema costituito dalle componenti 1,2,3 non funzioni è $1 - (1 - p^2)(1 - p) = p + p^2 - p^3$. Infine, la componente 4 e' in parallelo alle altre, quindi la probabilità che l'intero congegno non funzioni è $p(p + p^2 - p^3) = p^2 + p^3 - p^4$. Dunque, la probabilità che il congegno funzioni è $1 - p^2 - p^3 + p^4$.

b. Sia C = "la componente 4 è aperta", e D = "il congegno funziona". Notare che $C \cap D = C$ (se la componente 4 è aperta il congegno funziona). Pertanto

$$P(C|D) = \frac{P(C)}{P(D)} = \frac{p}{1 - p^2 - p^3 + p^4}.$$

ESERCIZIO 2 Sia (X, Y) un vettore aleatorio con densità congiunta

$$f_{X,Y}(x, y) = ce^{-|x-y|}1_{[0,1]}(x)1_{[0,x]}(y),$$

dove c è un'opportuna costante.

a. Determinare il valore di c

b. Determinare le densità marginali f_X e f_Y.

c. Determinare la densità della variabile casuale $Z = X - Y$.

Soluzione.a.

$$\begin{aligned} 1 = \int f_{X,Y}(x, y)dxdy = c\int_0^1 e^{-x}\left[\int_0^x e^y dy\right] dx = c\int_0^1 e^{-x}\left[e^x - 1\right] dx \\ = c\int_0^1 \left[1 - e^{-x}\right] dx = \frac{c}{e}, \end{aligned}$$

da cui $c = e$.

b.

$$f_X(x) = \int f_{X,Y}(x, y)dy = 1_{[0,1]}(x)ee^{-x}\int_0^x e^y dy = e\left[1 - e^{-x}\right] 1_{[0,1]}(x).$$

$$f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x, y)dx = 1_{[0,1]}(y)ee^y\int_y^1 e^{-x}dx = e\left[1 - e^{y-1}\right] 1_{[0,1]}(y).$$

c. Usando la formula di cambiamento di variabile per la trasformazione $(x, y) \mapsto (x - y, y)$, si trova

$$f_{Z,Y}(z, y) = f_{X,Y}(z + y, y) = ee^{-z}1_{[0,1]}(z + y)1_{[0,z+y]}(y) = ee^{-z}1_{[0,1]}(z)1_{[0,1-z]}(y).$$

e quindi

$$f_Z(z) = \int f_{Z,Y}(z, y)dy = e(1 - z)e^{-z}1_{[0,1]}(z).$$

ESERCIZIO 3.

Sia $ABCD$ un quadrato di lato unitario. Siano P, Q, R, S punti scelti a caso, rispettivamente, sui segmenti AB, BC, CD, DA, in modo tale che le lunghezze $X = \overline{AP}$, $Y = \overline{BQ}$, $Z = \overline{CR}$, $W = \overline{DS}$ sono variabili casuali indipendenti e con distribuzione $U(0, 1)$. Determinare il valor medio e la varianza dell'area del quadrilatero $PQRS$. (Sugg.: scrivere tale area in termini di X, Y, Z, W, e *non* eseguire calcoli con densità)

Soluzione. Sia $\mathcal{A}$ l'area in questione. Si ha

$$\mathcal{A} = 1 - \frac{X(1-W)}{2} - \frac{Y(1-X)}{2} - \frac{Z(1-Y)}{2} - \frac{W(1-Z)}{2}.$$

In altre parole

$$2(1-\mathcal{A}) = X(1-W) + Y(1-X) + Z(1-Y) + W(1-Z).$$

Usando l'indipendenza e il fatto che se $X \sim U(0,1)$ allora $1 - X \sim U(0,1)$ e che $E(X) = 1/2$, si ha

$$E[2(1-\mathcal{A})] = 1 \;\Rightarrow\; E(\mathcal{A}) = \frac{1}{2}.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}4E\left[(1-\mathcal{A})^2\right] &= E\left[X^2(1-W)^2\right] + E\left[Y^2(1-X)^2\right] + E\left[Z^2(1-Y)^2\right] + E\left[W^2(1-Z)^2\right] \\ &\quad + 2E[X(1-W)Y(1-X)] + 2E[X(1-W)Z(1-Y)] + 2E[X(1-W)W(1-Z)] \\ &\qquad + 2E[Y(1-X)Z(1-Y)] + 2E[Y(1-X)W(1-Z)] + 2E[Z(1-Y)W(1-Z)].\end{aligned}$$

Usando di nuovo l'indipendenza e le relazioni $E(X^2) = 1/3$, $E[X(1-X)] = 1/6$, dalla formula precedente con calcoli noiosi si trova

$$4E\left[(1-\mathcal{A})^2\right] = \frac{47}{24}.$$

Infine

$$Var(\mathcal{A}) = Var(1-\mathcal{A}) = E\left[(1-\mathcal{A})^2\right] - \frac{1}{4} = \frac{23}{96}.$$

ESERCIZIO 4.

$n = 1000$ clienti di una compagnia di assicurazioni stipulano una particolare polizza annuale contro il furto: se il cliente subisce un furto nel corso dell'anno, gli viene versato un capitale fisso $C = 10000$ Euro. Assumiamo che gli n clienti abbiano tutti la stessa probabilità $p = 0.1$ di subire un furto nel corso dell'anno, indipendentemente dagli altri. Sia X la quantità complessiva di denaro che esce dalle casse della compagnia al termine dell'anno, per pagare i clienti che hanno subito un furto, e sia c il costo della polizza, cioè il denaro che il cliente versa alla compagnia alla stipula.

a. Qual è la densità p_X di X?

b. Sia $Y = nc - X$ l'utile (o perdita) netto della compagnia al termine dell'anno. Supponiamo che la compagnia fissi c in modo tale che $E(Y) = \delta$, dove $\delta = 100000$ Euro è l'utile medio che la compagnia desidera. Quanto vale c?

c. Supponiamo ora che la compagnia sia più "prudente", cioè decida di fissare c in modo tale che

$$P(Y > \delta) \geq 0.95.$$

Qual è il più piccolo valore di c per cui vale quest'ultima disuguaglianza? (Sugg.: usare l'approssimazione normale)

Soluzione. a. X assume i valori kC, $k = 0, \ldots, n$.

$$p_X(kC) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

b. Chiaramente $\frac{X}{C} \sim B(n,p)$, per cui $E(X) = npC$. Perciò

$$\delta = E(Y) = nc - npC \;\Rightarrow\; c = pC + \frac{\delta}{n}.$$

c. Notare che

$$Y > \delta \iff X < nc - \delta \iff \frac{X}{C} < \frac{nc-\delta}{C}.$$

Usando l'approssimazione normale

$$\frac{\frac{X}{C} - np}{\sqrt{np(1-p)}} \approx N(0,1).$$

Ne segue che

$$P(Y > \delta) \simeq \Phi\left(\frac{\frac{nc-\delta}{C} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Quest'ultima quantità è maggiore di 0.95 se e solo se

$$\frac{\frac{nc-\delta}{C} - np}{\sqrt{np(1-p)}} > 1.96 \iff c \geq pC + \frac{\delta}{n} + \frac{C\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} 1.96.$$