Probabilità e Statistica (LT in Matematica)
Prof. P.Dai Pra, prima prova parziale 12/02/2004.

Cognome: Nome:

Matricola: Firma:

TEMA A

ESERCIZIO 1. Si dimostrino le seguenti identità:

i. Per ogni coppia di eventi A, B con $P(B) > 0$

$$P(A \Delta B | B) = 1 - P(A|B).$$

ii. Per ogni terna di eventi A, B, C con $P(B \cap C) > 0$ e $P(B^c \cap C) > 0$

$$P(A|C) = P(A|B \cap C)P(B|C) + P(A|B^c \cap C)P(B^c|C).$$

Soluzione.

i. Notare che $(A\Delta B) \cap B = B \setminus (A \cap B)$. Pertanto

$$\begin{aligned} P(A\Delta B|B) &= \frac{P((A\Delta B) \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B \setminus (A \cap B))}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = 1 - P(A|B). \end{aligned}$$

ii. Notare che $A \cap C$ è unione disgiunta di $A \cap B \cap C$ e $A \cap B^c \cap C$. Perciò

$$\begin{aligned} P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} + \frac{P(A \cap B^c \cap C)}{P(C)} = \\ &\frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} \frac{P(B \cap C)}{P(C)} + \frac{P(A \cap B^c \cap C)}{P(B^c \cap C)} \frac{P(B^c \cap C)}{P(C)} \\ &= P(A|B \cap C)P(B|C) + P(A|B^c \cap C)P(B^c|C). \end{aligned}$$

ESERCIZIO 2 Sia X una variabile casuale che assume i valori 0 e 1 e Y una variabile casuale a valori in $I\!N$, la cui densità congiunta è determinata dalle identità: per $n \in I\!N$

$$\begin{aligned} P(X=0,Y=n) &= p\tfrac{e^{-1}}{n!} \\ P(X=1,Y=n) &= (1-p)e^{-2}\tfrac{2^n}{n!}. \end{aligned}$$

a. Determinare le densità marginali p_X e p_Y.

b. Calcolare la probabilità condizionata $P(X=0|Y>0)$.

c. Calcolare la funzione generatrice dei momenti γ_Y, $E(Y)$ e $Var(Y)$.

d. Calcolare $Cov(X,Y)$ e il coefficiente di correlazione $\rho(X,Y)$.

Soluzione. a.

$$p_X(0) = \sum_n P(X=0,Y=n) = p = 1 - p_X(1).$$

$$p_Y(n) = P(X=0,Y=n) + P(X=1,Y=n) = p\frac{e^{-1}}{n!} + (1-p)e^{-2}\frac{2^n}{n!}.$$

b.

$$\begin{aligned} P(X=0|Y>0) = \frac{P(X=0,Y>0)}{P(Y>0)} &= \frac{P(X=0) - P(X=0,Y=0)}{1-P(Y=0)} \\ &= \frac{p - pe^{-1}}{1 - pe^{-1} - (1-p)e^{-2}}. \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} \gamma_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{tn} p_Y(n) = pe^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{tn}}{n!} + (1-p)e^{-2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n e^{tn}}{n!} \\ = p\exp\left(e^t - 1\right) + (1-p)\exp\left(2e^t - 2\right). \end{aligned}$$

Non è difficile calcolare

$$E(Y) = \gamma_Y'(0) = p + 2(1-p) = 2-p,\ \ E(Y^2) = \gamma_Y''(0) = 2p + 6(1-p) = 6-4p,$$

da cui si calcola $Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$.

d. Abbiamo appena calcolato $E(Y)$ e $Var(Y)$. Facilmente, dal punto a., si ha $E(X) = 1-p$ e $Var(X) = p(1-p)$. Inoltre

$$\begin{aligned} E(XY) = \sum_{x,y} xy p_{X,Y}(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} n p_{X,Y}(1,n) \\ = (1-p)e^{-2}\sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{2^n}{n!} = 2(1-p), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che $e^{-2}\sum_{n=0}^{+\infty} n\frac{2^n}{n!}$ è la media di una $Po(2)$. A questo punto è sufficiente sostituire i valori ottenuti per calcolare

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y),$$

e

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}.$$

ESERCIZIO 3. Si scelgono a caso 5 carte da un mazzo di 52 carte da Poker.

a. Calcolare la probabilità che le 5 carte estratte siano tutte di cuori.

b. Calcolare la probabilità che le 5 carte estratte siano tutte dello stesso seme.

c. Calcolare la probabilità che delle 5 carte estratte 3 siano di un seme e 2 di un altro.

d. Sia X il numero di assi presenti tra le 5 carte estratte. Quanto vale $E(X)$?

e. Sia Y il numero di semi distinti presenti nelle 5 carte estratte. Calcolare la probabilità condizionata $P(Y = 3|X = 2)$.

f. Calcolare $E(Y)$.

Soluzione. a. Sia Ω l'insieme dei sottoinsiemi di 5 carte, e P la probabilità uniforme su Ω. Poichè le carte di cuori sono 13, posto $A =$ " le 5 carte estratte sono tutte di cuori", si ha

$$P(A) = \frac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}.$$

b. se B è l'evento in questione, evidentemente

$$P(B) = 4P(A).$$

c. Sia C l'evento in questione. La scelta di un elemento si può eseguire come segue: prima si sceglie il seme da cui estrarre 3 carte (4 modi), poi si scelgono 3 carte da quel seme ($\binom{13}{3}$ modi), poi si sceglie il seme da cui estrarre 2 carte (3 modi), infine si scelgono 2 carte da quel seme ($\binom{13}{2}$ modi). Pertanto

$$P(C) = \frac{12\binom{13}{3}\binom{13}{2}}{\binom{52}{5}}.$$

d. Dopo aver assegnato un ordine arbitrario alle carte estratte, sia, per $i = 1, \ldots, 5$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'}i\text{-ma carta è un asso} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Sia ha che $P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = 4/52$, $X = X_1 + \cdots + X_5$, e perciò

$$E(X) = 5\frac{4}{52}.$$

e. Si consideri l'evento $D = \{Y = 3, X = 2\}$. Scegliere un elemento di D significa: scegliere 3 semi tra i 4 disponibili (4 modi); scegliere due dei 3 assi dei 3 semi scelti (3 modi); scegliere 3 carte tra le 36 dei 3 semi scelti che non sono assi ($\binom{36}{3}$ modi) escludendo le scelte in cui tali tre carte sono tutte dei due semi dei due assi ($\binom{24}{3}$ scelte). Perciò

$$P(D) = \frac{12\left[\binom{36}{3} - \binom{24}{3}\right]}{\binom{52}{5}}.$$

Inoltre, facilmente,

$$P(X = 2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}}.$$

Infine

$$P(Y=3|X=2) = \frac{P(D)}{P(X=2)}.$$

f. Si denotino con $i = 1, 2, 3, 4$ i semi. Sia

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{se tra le 5 carte estratte almeno una è di seme } i \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

L'evento $\{Y_i = 0\}$ significa che tra le 5 carte estratte il seme i non è presente. Tale evento ha probabilità $\binom{39}{5}/\binom{52}{5}$. Perciò

$$E(Y_i) = 1 - \binom{39}{5}\Big/\binom{52}{5},$$

ed essendo $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$,

$$E(Y) = 4\left(1 - \binom{39}{5}\Big/\binom{52}{5}\right).$$