Probabilità e Statistica (LT in Matematica)
Prof. P.Dai Pra, prova scritta 22/09/2004.

Cognome: Nome:

Matricola: Firma:

I diritti d'autore sono riservati. Ogni sfruttamento commerciale non autorizzato sarà perseguito.

ESERCIZIO 1. Sia $(U_n)_{n\geq 1}$ una successione di variabili casuali i.i.d. con distribuzione $Be(1/2)$. Diciamo che la sequenza $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ è costituita da k *blocchi* se esistono $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_{k-1} < n$ tali che

$$U_1 = \cdots = U_{j_1} \neq U_{j_1+1} = \cdots = U_{j_2} \neq U_{j_2+1} \cdots U_{j_{k-1}} \neq U_{j_{k-1}+1} = \cdots = U_n.$$

Ad esempio, la sequenza $(\underline{0,0},\underline{1,1,1},\underline{0},\underline{1},\underline{0,0})$ è formata da 5 blocchi. Denotiamo con X_n il numero di blocchi di $(U_1, U_2, \cdots, U_n)$.

a. Mostrare che U_n è indipendente dal vettore (X_{n-1}, U_{n-1}) (sugg.: usare il fatto che (X_{n-1}, U_{n-1}) è funzione di $(U_1, \ldots, U_{n-1})$).

b. Usando il fatto che

$$\begin{aligned}\{X_n = k\} &= \{X_{n-1} = k, U_{n-1} = 0, U_n = 0\} \cup \{X_{n-1} = k, U_{n-1} = 1, U_n = 1\} \\ &\cup \{X_{n-1} = k-1, U_{n-1} = 0, U_n = 1\} \cup \{X_{n-1} = k-1, U_{n-1} = 1, U_n = 0\},\end{aligned}$$

mostrare che

$$P(X_n = k) = \frac{1}{2}\left[P(X_{n-1} = k) + P(X_{n-1} = k-1)\right].$$

c. Sia γ_n la funzione generatrice dei momenti di X_n. Mostrare che

$$\gamma_n(t) = \frac{1+e^t}{2}\gamma_{n-1}(t).$$

d. Dopo aver calcolato $\gamma_1(t)$, determinare $\gamma_n(t)$ dalla formula ricorsiva al punto c.

e. Calcolare media e varianza di X_n.

ESERCIZIO 2 Sia $X_n \sim Po(n\lambda)$, e $Y_n = \frac{X_n - n\lambda}{n^{2/3}}$.

a. Usando la Disuguaglianza di Chebischev mostrare che per ogni $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} P(|Y_n| > \epsilon) = 0.$$

b. (Facoltativo) Calcolare la funzione generatrice dei momenti $\gamma_{X_n}(t)$ e determinare, per ogni $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \gamma_{X_n}(t).$$

ESERCIZIO 3. Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ una successione di variabili casuali i.i.d. con distribuzione $Ge(p)$. Sia inoltre Y_n il numero di elementi non nulli della sequenza $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

a. Determinare la densità discreta di Y_n.

b. Usando il Teorema del limite centrale, determinare una successione a_n tale che

$$\lim_{n\to+\infty} P(Y_n > a_n) = 0.025.$$

ESERCIZIO 4. Si considerino gli eventi A = "il paziente ha seguito correttamente le istruzioni del medico", e B = "il paziente è guarito". Supponiamo di avere le seguenti informazioni:

- la probabilità che un paziente segua correttamente le istruzioni del medico e guarisca è 0.4.
- La probabilità che un paziente che ha seguito le istruzioni correttamente guarisca è 0.8.
- La probabilità che un paziente che non ha seguito le istruzioni correttamente guarisca è 0.1.
- La probabilità che un paziente non segua le istruzioni correttamente e guarisca è 0.05.
- La proabilità che un paziente che non è guarito abbia seguito le istruzioni correttamente è 9/11.

Calcolare $P(A \cup B)$ e $P(A \setminus B)$.

ESERCIZIO 5. In una partita a Poker con 32 carte (8 per seme) ad un giocatore ne vengono servite 5. Si considerino gli eventi A = "il giocatore riceve almeno due assi", B = "il giocatore riceve almeno un asso", C = "il giocatore riceve l'asso di cuori". Calcolare $P(A|B)$ e $P(A|C)$.