

Probabilità e Statistica (LT in Matematica)

Prof. P.Dai Pra, seconda prova parziale 12/03/2004.

Cognome:

Nome:

Matricola:

Firma:

I diritti d'autore sono riservati. Ogni sfruttamento commerciale non autorizzato sarà perseguito.

ESERCIZIO 1. Sia X una variabile casuale la cui funzione di ripartizione è

$$F_X(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}},$$

e sia $Y = e^{-X}$.

a. Mostrare che Y è una variabile casuale assolutamente continua e determinarne la densità.

b. Mostrare che Y non ammette momenti di alcun ordine.

c. (Facoltativo) Mostrare che $Z = e^{-X/2}$ ammette valor medio, e calcolarlo.

Soluzione. a. Notare che Y assume solo valori positivi, perciò $F_Y(y) = 0$ se $y \leq 0$. Per $y > 0$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^{-X} \leq y) = P(X \geq -\log(y)) = 1 - F_X(-\log(y)) = 1 - \frac{1}{1 + y}.$$

Si ha che F_Y è di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti, dunque Y è assolutamente continua con densità

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{1}{(1 + y)^2} 1_{[0, +\infty)}(y).$$

b. Basta osservare che, per ogni $k \geq 1$

$$\int_0^{+\infty} \frac{y^k}{(1 + y)^2} dy = +\infty.$$

c. Il procedimento usato in a. conduce a

$$F_Z(z) = \left[1 - \frac{1}{1 + z^2} \right] 1_{[0, +\infty)}(z),$$

e dunque

$$f_Z(z) = \frac{2z}{(1 + z^2)^2}.$$

Ma allora, integrando per parti,

$$\begin{aligned} E(Z) &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{z^2}{(1 + z^2)^2} dz = \int_0^{+\infty} z \cdot \frac{2z}{(1 + z^2)^2} dz \\ &= -z \frac{1}{1 + z^2} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + z^2} dz = \arctan(y) \Big|_0^{+\infty} = \pi/2. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 2 Sia X una variabile casuale assolutamente continua con densità

$$f_X(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} 1_{[0,+\infty)}(x).$$

- Calcolare la relativa funzione di ripartizione F_X .
- Determinare la funzione generatrice dei momenti di X (sugg.: integrare per parti)
- Posto $Y = X^2$, mostrare che Y è una variabile casuale Gamma, e determinarne i parametri.

Soluzione. a. Chiaramente $F_X(x) = 0$ se $x < 0$. Per $x \geq 0$

$$F_X(x) = \int_0^x te^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

b.

$$\begin{aligned} \gamma_X(t) &= \int_0^{+\infty} e^{tx} f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{tx} F'_X(x) dx \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left\{ e^{tb} \left[1 - e^{-\frac{x^2}{2}} \right]_0^b - t \int_0^b e^{tx} \left[1 - e^{-\frac{x^2}{2}} \right] dx \right\} \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left\{ e^{tb} - e^{tb} e^{-\frac{b^2}{2}} - t \int_0^b e^{tx} dx + t \int_0^b e^{tx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right\} \\ &= 1 + t \int_0^{+\infty} e^{tx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 + te^{\frac{t^2}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx \\ &= 1 + te^{\frac{t^2}{2}} \int_{-t}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1 + \sqrt{2\pi} te^{\frac{t^2}{2}} \Phi(t), \end{aligned}$$

dove Φ è la funzione di ripartizione di una normale standard.

c. Per $y \geq 0$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq \sqrt{y}) = 1 - e^{-\frac{y}{2}}.$$

Perciò

$$f_Y(y) = \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{2}} 1_{[0,+\infty)}(y).$$

Dunque $Y \sim \text{Exp}(1/2)$.

ESERCIZIO 3. Siano $X_1, X_2, \dots, X_n \sim U(0, 1)$ indipendenti.

a. Determinare il più piccolo valore di n per cui

$$P(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq 10^{-1}) \geq \frac{9}{10}.$$

b. Usando la disuguaglianza di Chebyshev, determinare $\bar{n}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$

$$P(0.495 \leq \bar{X}_n \leq 0.505) \geq \frac{9}{10}.$$

c. Rispondere alla domanda in b. usando il Teorema del limite centrale (approssimazione normale).

Soluzione. a.

$$P(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq 10^{-1}) = 1 - [P(X_1 > 10^{-1})]^n = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n.$$

Perciò

$$P(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq 10^{-1}) \geq \frac{9}{10} \iff \left(\frac{9}{10}\right)^n \leq \frac{1}{10} \iff n \geq \frac{\log(10)}{\log(10) - \log(9)},$$

cioè $n \geq 22$.

b. Poiché $E(\bar{X}_n) = 1/2$ e $Var(\bar{X}_n) = \frac{1}{12n}$,

$$P(0.495 \leq \bar{X}_n \leq 0.505) = 1 - P\left(\left|\bar{X}_n - \frac{1}{2}\right| > 0.005\right) \geq 1 - \frac{1}{12n(0.005)^2}.$$

Dunque $P(0.495 \leq \bar{X}_n \leq 0.505) \geq \frac{9}{10}$ se

$$\frac{1}{12n(0.005)^2} \leq \frac{1}{10} \iff n \geq \frac{10}{12(0.005)^2} \iff n \geq 33334.$$

c. Posto

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{12n}}} \sqrt{n},$$

abbiamo

$$P(0.495 \leq \bar{X}_n \leq 0.505) = P\left(-0.005\sqrt{12n} \leq Z_n \leq 0.005\sqrt{12n}\right) \simeq 2\Phi(0.005\sqrt{12n}) - 1.$$

Quindi dev'essere $2\Phi(0.005\sqrt{12n}) - 1 \geq 0.9$, cioè

$$0.005\sqrt{12n} \geq \Phi^{-1}(0.95) = 1.64 \iff n \geq 9075.$$