Probabilità e Statistica (LT in Matematica)
Prof. P.Dai Pra, prova scritta 30/03/2004.

Cognome: Nome:

Matricola: Firma:

ESERCIZIO 1. Ad un bambino vengono regalati N palloncini gonfiabili. Ognuno di questi palloncini rimane "integro", cioè non scoppia, un numero di giorni la cui distribuzione è geometrica di parametro $p \in (0,1)$. Si considerino indiopendenti le durate dei diversi palloncini. Per $n = 1, 2, \ldots$ denotiamo con X_n il numero di palloncini ancora integri dopo n giorni.

a. Qual è la distribuzione di X_n?

b. Sia T la variabile casuale a valori naturali tale che l'ultimo palloncino scoppia dopo il $T+1$-mo giorno. Calcolate $P(T > n)$ per ogni $n \geq 0$, e la densità discreta p_T di T.

c. Siano $1 \leq m \leq n$ e $0 \leq h \leq k \leq N$. Calcolare la probabilità condizionata

$$P(X_n = h | X_m = k).$$

d. Per ogni fissato $n \geq 1$, calcolare

$$P(X_n = N | X_{2n} = 0).$$

ESERCIZIO 2 Sia Ω un insieme infinito, e $\{A_n : n \in I\!N\}$ una famiglia di insiemi non vuoti che formano una partizione di Ω, cioè $\bigcup_n A_n = \Omega$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ se $m \neq n$. Per $\alpha \subset I\!N$ definiamo

$$E_\alpha = \bigcup_{n \in \alpha} A_n.$$

Sia, infine

$$\mathcal{A} = \{E_\alpha : \alpha \subset I\!N\}.$$

a. Mostrare che $\mathcal{A}$ è una σ-algebra.

b. Mostrare che $\mathcal{A}$ è la più piccola σ-algebra che contiene tutti gli A_n.

ESERCIZIO 3. Sia X una variabile casuale scalare, e sia γ_X la sua funzione generatrice dei momenti. Assumiamo che esista $a > 0$ tale che $\gamma_X(t) < +\infty$ per ogni $t \in (-a, a)$. Posto $\mu = E(X)$, definiamo

$$\eta_X(t) = \log E\left[e^{t(X-\mu)}\right].$$

Per $n \geq 0$, la quantità $\eta^{(n)}(0)$ si dice *cumulante* di ordine n di X.

a. Esprimere i cumulanti di ordine $1, 2$ e 3 in termini dei momenti di X.

b. Calcolare i cumulanti di ogni ordine per $X \sim Po(\mu)$ e $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

(Sugg.: in entrambi i punti esprimere η_X in termini di γ_X.)

ESERCIZIO 4. Sia X una variabile casuale scalare assolutamente continua con densità

$$f_X(x) = c(x-1)\log x 1_{(0,1)}(x),$$

dove c è una costante opportuna.

a. Determinare il valore di c.

b. Calcolare i valori, eventualmente infiniti, di $E(X)$ e $E\left(\frac{1}{X}\right)$.

ESERCIZIO 5. Siano $X \sim U(0, 2)$ e $Y \sim U(1, 3)$ variabili casuali indipendenti.

a. Determinare la densità della variabile casuale $Z = \min(X, Y)$.

b. Determinare la densità della variabile casuale $W = X + Y$.